Exo 8 (hors programme)

$X \sim \mathcal{B}(n, \lambda^{-1})$, $\lambda > 1$ et $\hat{\theta}(X)$ estimateur de λ.

1) $$\mathbb{E}[\hat{\theta}(X)] = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{n-k} \hat{\theta}(k)$$

on utilise la fonction de transfert (avec X discrète)

avec X discrète, $$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) f(k).$$

2) Prouvons que l'estimateur $\hat{\theta}(X)$ est biaisé.

Par l'absurde, on suppose $\mathbb{E}[\hat{\theta}(X)] = \lambda$.

On a donc d'après la question 1),

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{-k} (1-\lambda^{-1})^{n-k} \hat{\theta}(k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\lambda^n}{\lambda^n} \lambda^{-k} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{n-k} \hat{\theta}(k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{n-k} \hat{\theta}(k)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \neq \underbrace{\lambda^{n+1}}_{\text{polynôme de degré } n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda-1)^{n-k} \underbrace{\hat{\theta}(k)}_{\text{ne dépend pas de } \lambda}}_{\text{polynôme de degré au plus } n}$$

CONTRADICTION