3) <u>Exo 10 fin</u>

même expérience que dans 2) <u>n fois</u>

mais en n'effectuant que $K = \frac{N}{n}$ tirages sans remise

Y_1 : nombre de boules rouges tirés à la 1ère exp.

⋮

Y_n : ______________________ à la même exp.

L'énoncé de la Q2) nous donne :

$\mathbb{E}[Y_1] = Kp$

$Var(Y_1) = Kp(1-p)\dfrac{n_1+n_2-K}{n_1+n_2-1}$

a) On peut proposer $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ en supposant que les n exp. sont <u>i.i.d</u>.

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[Y_1] = Kp$$

(par l'énoncé de la Q2) qui nous donne la loi de Y_1)

linéarité de $\mathbb{E}$.

Y_i m̂ loi.

On peut donc proposer $\dfrac{\overline{Y}_n}{K}$ qui est non biaisé.

$$\underbrace{\frac{\overline{Y}_n}{K}}_{} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \tilde{Y}_N$$

$$EQM(\tilde{Y}_N, p) = Var(\tilde{Y}_N) + \underbrace{Biais^2(\tilde{Y}_N)}_{=0}$$

$$= Var(\tilde{Y}_N)$$

Y_i indep.

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{m} Var(Y_i)$$

Y_i de m loi

$$= \frac{1}{N^2} m \, Var(Y_1)$$

par l'énoncé de la qu 2)

$$= \frac{1}{N^2} m K p(1-p) \frac{m_1 + m_2 - K}{m_1 + m_2 - 1}$$

$$= \frac{p(1-p)}{N} \frac{m_1 + m_2 - K}{m_1 + m_2 - 1}$$

L'erreur est meilleur de pour le premier estimateur mais moins bonne que le deuxième car $K = \frac{N}{m} < N$

à comparer

$$\Rightarrow m_1 + m_2 - K > m_1 + m_2 - N$$

b) On a via le TCL,

$$\sqrt{n}\,(\overline{Y}_n - p) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{N} \frac{m_1+m_2-K}{m_1+m_2-1}\right)$$

cela implique

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{Y}_n - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N} \frac{m_1+m_2-K}{m_1+m_2-1}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

⋮

On peut aussi reprendre ce que l'on a trouvé dans la question 1 b).

$$IC_{1-\alpha} = \left[\overline{Y}_n \pm q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{N} \frac{m_1+m_2-K}{m_1+m_2-1}} \right]$$