# Exercice 10

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Cette loi a deux paramètres

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} X$

1) vraisemblance sur deux paramètres

$$L_X(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mu,\sigma^2}(X_i) \qquad f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

2) EMV de $\mu$ et $\sigma^2$

$L_x$ est une fonction de 2 variables $\mu$ et $\sigma^2$.

- on passe à la log-vraisemblance :

$$\ell_x(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

On doit résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \ell_x(\mu, \sigma^2) = 0 & \text{pour trouver un estimateur de } \mu \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell_x(\mu, \sigma^2) = 0 & \text{pour trouver un estimateur de } \sigma^2 \end{cases}$$

• $\frac{\partial}{\partial \mu} \ell_x(\mu,\sigma^2) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\mu)}{2\sigma^2}$ (seulement le deuxième terme de $\ell_x$ dépend de $\mu$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \iff \mu = \overline{X}_n .$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 .$$

• $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell_x(\mu,\sigma^2) = -\frac{n \cancel{2\pi}}{2\cancel{2\pi}\sigma^2} + \sum \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$

je dérive en $\underline{\sigma^2}$ et pas en $\sigma$ ! ⚠

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \overset{\text{multiplier par } 2\sigma^2}{\iff} \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2$$

inconnu

ici on fixe $\mu = \overline{X}_n$ .

on le remplace par $\overline{X}_n$ .

On a comme candidats pour l'EMV

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X}_n \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \end{cases}$$

La solution est-elle unique ? Il faut vérifier que la fonction est concave sur $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espace de } \mu} \times \underbrace{\mathbb{R}_+^*}_{\text{espace de } \sigma^2}$.

↳ la Hessienne doit être définie négative

(valeurs propres $< 0$)

$$H(\overline{X}_n, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ell_x & \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ell_x \\ \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ell_x & \frac{\partial^2}{\partial \sigma^4} \ell_x \end{pmatrix}$$

Les dérivées croisées $\frac{\partial}{\partial\mu\,\partial\sigma^2}$ et $\frac{\partial}{\partial\sigma^2\,\partial\mu}$ sont égales.

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell_x(\bar{X}_n,\sigma^2)\right) = \frac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n} = 0 .$$

Or $\mu = \bar{X}_n$.

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ell_x(\bar{X}_n,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ell_x(\bar{X}_n,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{\sigma^4} < 0 .$$

$$H(\bar{X}_n,\sigma^2) = \begin{pmatrix} -n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & -n/\sigma^4 \end{pmatrix}$$ définie négative

L'EMV est $\hat{\mu} = \bar{X}_n$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X}_n)^2$

3) On remarque que l'on retrouve l'estimateur usuel de la moyenne et ~~de~~ de la variance (cf exercice 1 TD2)