Loi de Poisson Exercice 7

$X \sim \mathcal{P}(\theta)$

1) $(X_1, \dots, X_n)$ iid .

$\mathbb{E}[X] = \theta$ Par la "méthode des moments",
un estimateur de $\overline{X}_n$.

$\overline{X}_n$ est un estimateur de $\mathbb{E}[X] = f(\theta) = \theta$

$$\left(f^{-1}(\overline{X}_n) \text{ ———— } f^{-1}(\mathbb{E}[X]) = f^{-1}(f(\theta)) \right)$$

$\mathrm{Var}(X) = \theta$.

2) consistant LGN $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \theta$.

↳ Donc $\overline{X}_n$ est fortement consistant.

asympt. normal

TCL $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta)$

3) Estimateur du max de vrais.

loi discrète.

$\mathbb{P}(X_i = k)$

⚠

- $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}$

$\ell_X(\theta) = \log(L_X(\theta))$

- $\ell_X(\theta) = -n\theta + \log(\theta) \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$

- $\ell'_X(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

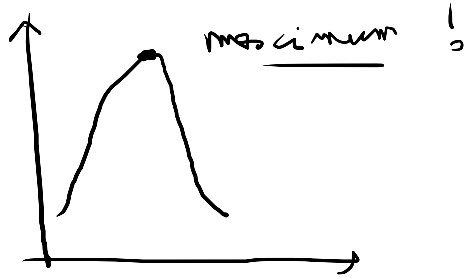
$\log(a^b) = b \log(a)$

- $\ell_X'(\theta) = 0 \iff \theta = \bar{X}_n$. (candidat EMV)

- ℓ_X concave (strictement)

$$\ell_X''(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\geq 0 \text{ car } X_i \in \mathbb{N} \text{ (loi de Poisson)}}$$

< 0.



EMV et $\hat{\theta}_n^{MV} = \bar{X}_n$.

4) Résultats dans la 2).

Exercice 8

$$\left| \begin{array}{l} Y \sim \mathcal{E}xp(1) \\ X = Y + \theta \end{array} \right.$$

1) $\mathbb{E}[Y] = 1$.

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y + \theta] = 1 + \theta$.

linéarité

2) $X_1, \dots X_n$ de m̂ loi que X

Un estimateur de $\mathbb{E}[X]$ est $\overline{X}_n$

——— de θ est $\overline{X}_n - 1$. $\longrightarrow$ $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n - 1$.

∘ consistance

LGN $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 1 + \theta$

TR de continuité $g(x) = x - 1$, $\underbrace{g(\overline{X}_n)}_{= \hat{\theta}_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \underbrace{g(1+\theta)}_{= \theta}$

Sans biais ?

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_m - \theta] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_m] - \theta$$
$$= \mathbb{E}[\bar{X}_m - 1] - \theta$$
$$= \theta + 1 - 1 - \theta = 0.$$

3) $\mathrm{Var}(Y) = 1$. $Y \sim \mathcal{E}xp(\theta) \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \mathrm{Var}(Y) = \theta$.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y + \theta) = \mathrm{Var}(Y) = 1.$$

$$\mathrm{Var}(x + \underset{\text{constante}}{c}) = \mathrm{Var}(X).$$

4) TCL $\sqrt{m}\left(\bar{X}_m - (\theta + 1)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Rightarrow \sqrt{m}\left(\underbrace{\bar{X}_m - 1}_{= \hat{\theta}_m} - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

5) $\mathbb{E}\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$

X_i de même loi.

$= \mathrm{Var}(\bar{X}_n - 1)$

$= \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n} \mathrm{Var}(X_1)$

X_i indép.

$= 1/n$

6) EMV

- $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \exp(-(x_i - \theta)) \mathbb{1}_{[\theta ; +\infty[}(x_i)$

- $\cancel{L_X}$

DERIVER UNE INDICATRICE IMPOSSIBLE

$$\mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \leq X_i \leq +\infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

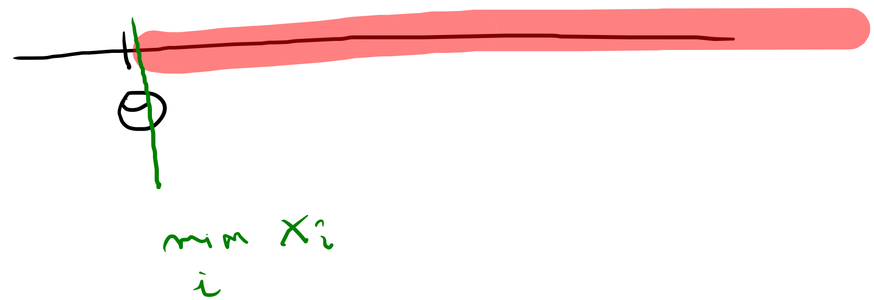
Raisonnement pour trouver le maximum de L_x : (sans dériver)

- si il y a un X_i qui est plus petit de θ, L_x vaut 0.
- le maximum (unique) de L_x, c'est quand tous les X_i sont plus grands que θ.

càd :

$$\boxed{\forall i,\ X_i \geq \theta}$$

$$\iff \min_i X_i \geq \theta$$



↳ L'estimateur du max. de vraisemblance est la valeur (unique) qui maximise L_x.

donc c'est $\hat{\theta}^{mv} = \min_i X_i \triangleq X_{(1)}$

↑ notation.

7) $n(\hat{\theta}^{mv} - \theta)$ <u>loi ?</u> Fonction de répartition.

$$\mathbb{P}\left(n(\hat{\theta}^{mv} - \theta) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\hat{\theta}^{mv} \leq \frac{x}{n} + \theta\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\min_i X_i \leq \frac{x}{n} + \theta\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\min_i X_i > \frac{x}{n} + \theta\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\forall i \ X_i > \frac{x}{n} + \theta\right)$$

X_i indép.

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i > \frac{x}{n} + \theta\right)$$

X_i de m̂ loi

$$= 1 - \left(\mathbb{P}\left(X_1 > \frac{x}{n} + \theta\right)\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq \frac{x}{n} + \theta\right)\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{n} + \theta - \theta\right)\right)\right)\right)^n, \ \forall x \geqslant 0$$

$$= 1 - \exp(-x), \ \forall x \geqslant 0.$$

Donc $n(\hat{\theta}^{mv} - \theta) \sim \mathcal{E}xp(1)$.

8) $n(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}xp(1)$ (car $n(\hat{\theta}^{MV} - \theta) \sim \mathcal{E}xp(1)$)

et $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Vitesse de convergence ? Pour $\hat{\theta}_n^{MV}$ c'est $1/n$

Pour $\hat{\theta}_n$ c'est $1/\sqrt{n}$

On préfère l'estimateur plus rapide qui converge en $1/n$.

9) Risque quadratique Soit $Z_n = \min\limits_i X_i$.

On a vu au TD 1 (exo 6) que

$F_{Z_n}(x) = 1 - \exp(n(\theta - x))$, $\forall x \geq \theta$. dériver

donc $f_{Z_n}(x) = n \exp(n(\theta - x)) \mathbb{1}_{[\theta;+\infty[}(x)$

$$\mathbb{E}\left[(Z_n-\theta)^2\right] = \mathbb{E}\left[Z_n^2\right] - 2\theta\,\mathbb{E}\left[Z_n\right] + \theta^2 .$$

$$= ?$$

$$\mathbb{E}\left[Z_n\right] = \int_\theta^{+\infty} x \; n\exp\left(n(\theta-x)\right)dx$$

IPP $u = x \quad u' = 1$

$v' = n\exp(n(\theta-x))$

$v = -\exp(n(\theta-x))$

$$= \left[-x\exp\left(n(\theta-x)\right)\right]_\theta^{+\infty} + \int_\theta^{+\infty} \exp\left(n(\theta-x)\right)dx$$

$$= \theta + \left[\frac{1}{n}\exp\left(n(\theta-x)\right)\right]_\theta^{+\infty} = \theta + \frac{1}{n} .$$

$$\mathbb{E}\left[Z_n^2\right] = \int_\theta^{+\infty} x^2 \; n\exp\left(n(\theta-x)\right)dx$$

IPP $u = x^2 \quad u' = 2x$

$v' = n\exp(n(\theta-x)) \quad v = -\exp(n(\theta-x))$

$$= \left[-x^2\exp\left(n(\theta-x)\right)\right]_\theta^{+\infty} + 2\int_\theta^{+\infty} x\exp\left(n(\theta-x)\right)dx$$

$$= \theta^2 + 2\,\frac{\mathbb{E}\left[Z_n\right]}{n} = \theta^2 + 2\left(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \theta^2 + 2\,\frac{n\theta+1}{n^2}$$

$$\mathbb{E}\left[(Z_n - \theta)^2\right] = \theta^2 + \frac{2n\theta + 2}{n^2} - 2\theta^2 - \frac{2\theta}{n} + \theta^2 .$$

$$= \frac{2n\theta + 2}{n^2} - \frac{2\theta}{n} = \frac{2}{n^2} .$$