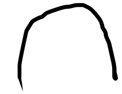
Fin exercice 4

On avait :

$$\ell_x'(p) = 0 \iff p = \bar{X}_n^{-1}$$

 Strictement concave

- $\hat{p}_n = \bar{X}_n^{-1}$ est un candidat pour l'estimateur du max. de vrais

- ℓ_x est-elle strictement concave ? $\ell_x'(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}(n\bar{X}_n - n)$

$$\ell_x''(p) = -\frac{n}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}(n\bar{X}_n - n).$$

Prop | f, g stric concave $\Rightarrow f+g$ stric concave

- $p \mapsto -\frac{1}{p^2}$ strictement concave $(p \in]0,1[)$

- $(n\bar{X}_n \geq n)$ $\rightsquigarrow$ $-\frac{1}{(1-p)^2}$ strictement concave

  ↳ valeur de X_i dans $\mathbb{N}$

On ne veut pas  ← plusieurs valeurs possible pour argmax

$\hookrightarrow$ Conclusion exo 4

$p \mapsto \ell_X(p)$ est strictement concave,

$\hat{p}_n = \bar{X}_n^{-1}$ est bien l'estimateur (unique)

du max de vrais.

Démarche estimateur du max. de vraisemblance

Exemple :

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des données.
On suppose que ce sont les réalisations
d'un échantillon théorique $(X_1, \dots, X_n)$ de loi exponentielle
iid
de paramètre θ.

- la loi exponentielle de paramètre θ est une hypothèse

On la note $\mathbb{P}_\theta$.

Vraisemblance → « probabilité » que les réalisations proviennent effectivement d'un échantillon théorique de loi $\mathbb{P}_\theta$.

Quelle est cette proba ?

Comme $(X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathbb{P}_\theta$, c'est le produit des proba pour que X_i prenne la valeur x_i.

Cas continu $\quad L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$ ← abus de notation cela devrait être $f_\theta(x_i)$

Cas discret $\quad L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = X_i)$ ← $\mathbb{P}(X = x_i)$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Valeur de θ pour la loi $\mathbb{P}_\theta$ qui maximise

le probabilité d'observer les données $(x_1, \dots, x_n)$ comme réalisation

d'un échantillon iid théorique $(X_1, \dots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}_\theta$.

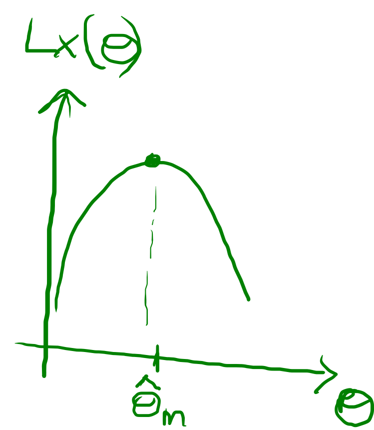
↳ maximise la vraisemblance

Démarche

1) écrire la vraisemblance
2) écrire la log-vraisemblance (si besoin)
3) dériver la (log)-vraisemblance
4) annuler la (log)-vraisemblance
5) mq la (log)-vraisemblance est concave strictement

concave → maximum

strictement → unicité



continue $\mathbb{E}[X] = \int x f(x)\, dx$

discrète $\mathbb{E}[X] = \sum_k \mathbb{P}(X=k)\, k$

Exo 5

1) Astuce 1 | Intégration par parties.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \theta x e^{-\theta x}\, dx$$

(continue)

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \theta e^{-\theta x} \qquad v = -e^{-\theta x}$

$$= \left[-x e^{-\theta x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\theta x}\, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{\theta} e^{-\theta x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\theta}$$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \Rightarrow$ on calcule $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

2 IPP

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}$.

$\bar{X}_n \to \mathbb{E}[X] = 1/\theta$

$1/\bar{X}_n \to 1/\mathbb{E}[X] = \theta$

2) $X_1, \dots, X_n$ iid

Comme $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}$, un estimateur naturel de θ est $\frac{1}{\bar{X}_n}$.

3) consistance

- LFGN
  - X_i iid
    $\mathbb{E}[X] = 1/\theta < \infty$

  , $\bar{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \frac{1}{\theta}$

- TR de continuité : $g(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \theta$$

4) asympt. normale

- TCL
  - X_i iid
    $\mathbb{E}[X] < \infty$
    $\mathrm{Var}(X) < \infty$

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right)$$

• Δ méthode : $g(x) = \frac{1}{x}$ continue, dérivable $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

$$g'\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\theta^2.$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2).$$

---

5) $\forall \theta > 0$,

• $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta x_i}$

• $\ell_X(\theta) = \log(L_X(\theta))$

$= n \log \theta + \sum_{i=1}^{n} \log(e^{-\theta x_i})$

$= n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} X_i = n \log \theta - \theta \overline{X}_n n$

- $\ell_X'(\theta) = \dfrac{n}{\theta} - n\overline{X}_n$.

- $\ell_X'(\theta) = 0 \iff \underbrace{\theta = \dfrac{1}{\overline{X}_n}}_{\text{candidat}}$. (Exp loi à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ $\mathbb{P}(\forall i\ X_i = 0) = 0$ p.s.)

- $\ell_X''(\theta) = -\dfrac{n}{\theta^2}$

$\theta \mapsto -\dfrac{1}{\theta^2}$ strict. concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\hat{\theta}_n^{EMV} = \dfrac{1}{\overline{X}_n}$ est un estimateur du max de vraisemblance.

6) $\underline{\hat{\theta}_n^{EMV}}$ est le m̂ estim. que par la méthode des moments.

(m̂ types de conv.).

Exercice 6

$$f_\theta(x) = \lambda x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1) Calculons λ.

On a : $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx = 1}$

$$\int_0^{+\infty} \lambda x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx = \left[-\lambda \frac{1}{2} \theta \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\theta \lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2}{\theta}.$$

2) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x)\,dx$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} 2\frac{x^2}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx$$

1) méthode IPP $\quad u = x \quad v' = x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)$ . ...

(2) utiliser la densité d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

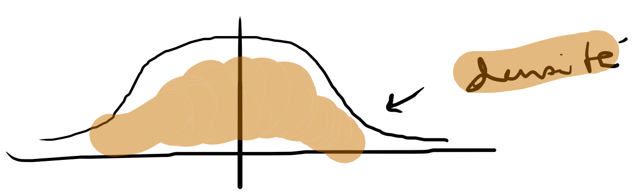
$$\sigma^2 = \frac{\theta}{2}, \quad \mu = 0$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} 2\frac{x^2}{\theta\sqrt{2\pi\frac{\theta}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \sqrt{\pi\theta}\, dx$$

On fait apparaître la densité d'une $\mathcal{N}\left(0, \frac{\theta}{2}\right)$

$\mathcal{N}$ symétrique

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{x^2}{\theta\sqrt{2\pi\frac{\theta}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \sqrt{\pi\theta}\, dx$$



$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}\sqrt{\pi\theta}\,\mathbb{E}[Y^2] \quad , \quad Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\theta}{2} = \mathbb{E}[Y^2]$$

car $\mathbb{E}[Y] = 0$

$$= \frac{1}{\theta}\sqrt{\pi\theta}\,\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta.$$

3) $X_1, \dots, X_n$ iid.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}. \longrightarrow$$

Par la méth. des moments un estimateur naturel est $\frac{4}{\pi}\overline{X}_n^2$

$$\frac{4\,\mathbb{E}[X]^2}{\pi} = \theta$$

4) Consistance . LFGN $\bar{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$.

. Th de continuité $g(x) = \frac{x^2 4}{\pi}$ continue sur $\mathbb{R}$

$$\frac{4\bar{X}_n^2}{\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \theta .$$

asympt. normale . TCL $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta\right)$

. Δ méthode $g(x) = \frac{x^2 4}{\pi}$ continue sur $\mathbb{R}$, dérivable

$$g'(x) = \frac{8x}{\pi}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\right) = 4\frac{\sqrt{\pi\theta}}{\pi} = \frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Bigg(0, \underbrace{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\theta^2 8}{\pi}}_{\left(\frac{16}{\pi} - 4\right)\theta^2}\Bigg)$$

5) $\bullet\ L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$.

$$= \prod_{i=1}^{n} 2\theta^{-1} x_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)$$

$$= \frac{2^n}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)$$

$\bullet\ \ell_x(\theta) = \log(L_x(\theta))$

$$= n\log(2) - n\log(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)\right)$$

$$= n\log(2) - n\log(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta}.$$

dérivée par rapport à θ $\bullet\ \ell_x'(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^2}$

- $\ell_x'(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ← candidat

- ℓ_x strictement concave ?

$$\ell_x'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \left(-\theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)$$

Tableau de variation :

(exclu) θ	0		$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$		$+\infty$
ℓ'_x		$+$	0	$-$	
ℓ_x		↗		↘	

On a donc bien $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ estimateur du maximum de vraisemblance.

6) Normalité asymptotique

Application du TCL

- X_i^2 iid
- $\mathbb{E}[X_i^2] = \theta$
- $Var(X_i) = \underbrace{\mathbb{E}[X_i^4]}_{} - \mathbb{E}[X_i^2]^2$

on a besoin de calculer le moment d'ordre 4

$$\mathbb{E}[X^4] = \int_{\mathbb{R}} x^4 f_\theta(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty 2\theta^{-1} x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx$$

IPP $\rightarrow$ $\left| \begin{array}{ll} u = x^4 & u' = 4x^3 \\ v' = 2\theta^{-1} x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) & v = -\exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \end{array} \right.$

$$\mathbb{E}[X^4] = \left[-x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty + \int 4x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx$$

Je reconnais $\mathbb{E}[X^2] \times 2\theta$

On a donc

$$\mathbb{E}[X^4] = 2\theta\,\mathbb{E}[X^2]$$

$$= 2\theta^2$$

Rappel : $\mathbb{E}[X^2] = 2\theta^{-1}\int_0^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)dx$

On a donc $\mathrm{Var}(X^2) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$.

↳ TCL donne donc (avec $Y_i = X_i^2$, $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$)

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

7) On peut comparer les variances asymptotiques des 2 estimateurs.

Pour l'estim. par la méthode des moments, on avait $\left(\frac{16}{\pi} - 4\right)\theta^2$

Pour l'estim. du max de vrais., on a θ^2.

$\frac{16}{\pi} - 4 > 1$, donc on choisit l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$.

Retour question 1

Calcul de la variance : $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} 2\theta^{-1} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx$$

Par IPP, $u = x^2$ $\qquad u' = 2x$

$v' = 2\theta^{-1} x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)$ $\qquad v = -\exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \left[-x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} 2x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx}$$

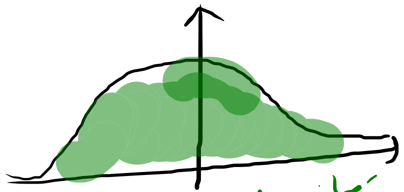
$= \theta \int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx$

$= \theta$

$= \theta$.

donc $Var(X) = \theta - \frac{1}{4}\pi\theta = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta$.

Récap de ce qui a été utilisé (pour les calculs en début d'exo)



- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ si f densité

- IPP utile !!

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta} \int x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx$

On remarque que c'est presque (à changement de var. près) le moment d'ordre 2 d'une $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$$Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

on le voit sur le dessin

- Si X a une loi symétrique, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$