Exercice 3

$\varphi : \Theta \mapsto \varphi(\Theta)$ C^1 - difféomorphisme

φ difféo $\rightarrow$ φ bijective.

$\rightarrow$ φ différentiable sur Θ

$\rightarrow$ φ^{-1} différentiable sur $\varphi(\Theta)$.

φ C^1-difféo $\rightarrow$ φ difféomorphisme

$+$ C^1 (continue et de dérivée continue)

$+$ φ^{-1} C^1

1) $\varphi(\theta) = \mathbb{E}[X^k]$.

2.3.1.

estimateur naturel : $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

$\mathbb{E}[X] \to$ estimateur naturel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) • consistant $\Rightarrow$ LGN

$\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \varphi(\theta)$

on pose $Y_i = X_i^k$ • Y_i i.i.d. (car X_i i.i.d)

• $\mathbb{E}[Y_i] = \varphi(\theta)$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \varphi(\theta).$$

• asymptotiquement normal ($\rightsquigarrow$ TCL) Δ méthode.

$\hat{\varphi}_n$ est un estim. asympt. norm. de $\varphi(\theta)$, si $\exists\, \sigma^2 > 0$,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

<u>TCL</u> $\quad \cdot\, Y_i = X_i^k$ i.i.d

$\cdot\ \mathbb{E}[Y_i] = \varphi(\theta)$, $\mathbb{E}[Y_i^2]$ finie

on a le droit de poser

On pose $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{Var}(X_i^1)$.

Par le TCL,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

3) $\mathbb{E}[X^k] = \varphi(\theta)$. Un estimateur de θ ?

$\cdot$ on a déjà un estimateur de $\varphi(\theta)$ qui est :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \longrightarrow \varphi(\theta)$$

Un estimateur naturel de θ est :

$$\underbrace{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right)}_{=\ \varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n)}$$

, avec φ^{-1} <u>bien définie</u> (car φ est un difféo)

$\mathbb{P}$	LGN	Th de cont. (φ c°)
$\mathcal{L}$	TCL	Δ méthode

4) consistance $\varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n)$

- on a $\hat{\varphi}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \varphi(\theta)$
- φ^{-1} fonction continue (car φ difféo)

Par le théorème de continuité,

$$\varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \theta = \varphi^{-1}(\varphi(\theta))$$

5) asym. normale $\varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n)$

- on a $\sqrt{n}\,(\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- φ^{-1} continue ✓, dérivable en $\varphi(\theta)$ ✓ (car dérivable sur $\varphi(\Theta)$)
- $(\varphi^{-1})'(\theta) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\theta))}$

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(\theta)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(\theta)))} = \frac{1}{\varphi'(\theta)}$$

$$\sqrt{n}\left(\varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n) - \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(\theta))}_{=\theta}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\varphi'(\theta)^2}\right)$$

Exercice 4

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$ $\quad \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.

fonction de rép d'une loi discrète

(si loi continue $\mathbb{P}(X \leq k)$)

1) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ $\quad$ ($\leftarrow$ à connaître)

2) $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.

On a $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$. $\rightarrow p = \dfrac{1}{\mathbb{E}[X]}$

Un estimateur naturel de $\mathbb{E}[X]$ est $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

de p est $\hat{p}_n = \dfrac{1}{\overline{X}_n} = g(\overline{X}_n)$

où $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3) consistant ($\mathbb{P}$) $\Uparrow$ fort. consistant (p.s.)

- LFGN $\rightarrow$ $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \dfrac{1}{p}$

  X_i i.i.d

  $\mathbb{E}[X_1] = 1/p$

- Th de continuité appliqué à g continue en $\dfrac{1}{p}$

  (oui car $p \neq 0$ et g est continue sur $\mathbb{R}^*$)

Donc, $g(\bar{X}_n) = \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} g\left(\frac{1}{p}\right) = p$.

asymptotiquement normal

1) On applique à $\bar{X}_n$

- TCL X_i iid

$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{p}$

$Var(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right)$$

2) On applique à $g(\bar{X}_n) = \hat{p}_n$.

- Δ méthode

g est continue, dérivable en $\frac{1}{p}$.

$g'\left(\frac{1}{p}\right) = p^2$.

$$\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \underbrace{\mathcal{N}\left(0, p^4 \frac{1-p}{p^2}\right)}_{\mathcal{N}(0, (1-p)p^2)}.$$

4) estimateur du max. de vraisemblance

↳ vraisemblance fonction du paramètre à estimer (qui dépend de l'échantillon)

$$L_X(p) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = X_i)$$

avec $X = (X_1, \dots, X_n)$

parfois on met x_i : réalisation de X_i

$$\left(L'_X(p) = \frac{\partial L}{\partial p} \right) \rightsquigarrow L'_X(\hat{p}) = 0 \quad \hat{p} \text{ max} . \; L_X \frown \text{ concave}$$

$$L_X(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i - 1} p = p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i - 1}$$

. Pour dériver c'est compliqué la vraisemblance → $\prod_{i=1}^{n}$

. Passer à la log vraisemblance $\log(a \times b) = \log a + \log b$.

$$\log\left(\prod_{i=1}^{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \log$$

$$\longrightarrow (f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\ell_x(p) = \log(L_x(p))$$

$$= \log\left(p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i-1}\right)$$

$$= \log p^n + \sum_{i=1}^{n} \log(1-p)^{x_i-1}$$

$$\log a^b = b \log a$$

$$= n \log p + \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) \log(1-p)$$

$$= n \log p + \log(1-p) \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)$$

$$(\log(1-p))' = \frac{(1-p)'}{1-p} = \frac{-1}{1-p}.$$

$$\ell'_x(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)$$

↑

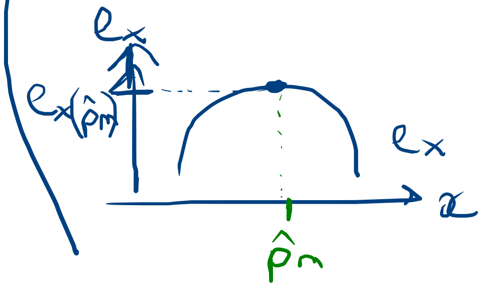
dérivée par rapport à p

Estimateur du max de vrais. → $\hat{p}_n = \arg\max L_x(p)$

$= \arg\max \ell_x(p)$

1) écrire la vraisemblance $L_x(p)$
2) passer à log-vraisemblance $\ell_x(p)$ (← le plus souvent)
3) dériver la log-vraisemblance
4) $\underline{\ell'_x(\hat{p}_n) = 0}$. (argmax)
(annuler la dérivée)
5) mq ℓ_x est $\underline{\text{concave}}$.

(si max $\hat{p}^* = \ell_x(\hat{p}_n)$



)

On cherche p tq $\ell_x'(p) = 0$.

$$\frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1) = 0 \qquad \times (1-p)p \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad n(1-p) - p\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1) = 0 \qquad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Longleftrightarrow \quad n(1-p) - pn\overline{X}_n + pn = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad n - np\overline{X}_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad p = \overline{X}_n^{\,-1}$$

(le $\hat{m}$ est par la méthode des moments)

($p = \overline{X}_n^{\,-1}$ est un candidat pour estimateur du max. de vrais.)

Il faut mq ℓ_x est <u>concave</u>