Notions les + importantes abordées (6 premiers TDs)

- "Proba" → variable aléatoire X → ce n'est pas le même objet qu'un réel, c'est non déterministe

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Ω ↑ espace de probabilité

$\Rightarrow$ • on ne peut pas écrire ~~$X = 8$~~.

c'est $X = 8$ p.s. ← de pour v.a.s.

• on a des types bien précis de convergence

exemple : convergence p.s., loi, ...

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 8$? Quel type de convergence ?

• Type de convergence : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.

Convergence en moyenne quadratique

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} X$$

Convergence presque sûre

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$$

(ex co 1 TD 1)

⇓

Convergence en proba

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$$

⇓

Convergence en loi

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

cv en $\mathbb{P}$ vers la cste.

⇑

cv en loi vers une constante (déterm.)

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} a \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} a$$

2

• Estimateur

• $\rightarrow \bar{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ (moy. empirique)

$\mathbb{E}[\ ] \rightarrow \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}$

$\rightarrow$ estimateur $\Rightarrow$ une v.a. ; Proba $\rightarrow$ outil

$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

$\hookrightarrow \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X - \mathbb{E}[X])^2$ ($\hookrightarrow$ Méthode des moments)

$\rightarrow$ estimateur $\rightarrow$ $\underline{f(X_1, \dots, X_m)}$. f fonction quelconque. ne fait intervenir que des quant. connues

• Comportement de $\frac{X_1 + \dots + X_m}{m}$ où X_i i.i.d.

+ hyp. sur les moments

$(\log X_1) + \dots + \log(X_m)$ $Y_1 = \log(X_1)$

$\hookrightarrow$ 2 gros théorèmes :

① LFGN $\leftarrow$ loi forte.

$\frac{X_1 + \dots + X_m}{m} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$, si X_i i.i.d, $\mathbb{E}[X_1]$ existent.

$\boxed{LGN} \rightarrow \mathbb{P}$

$\hookrightarrow$ loi faible

② TCL

X_i i.i.d, $\mathbb{E}[X_1]$, $Var(X_1)$ existent

$$\sqrt{m}\left(\frac{X_1 + \dots + X_m}{m} - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Var(X_1))$$

Convergence asymptotique normale.

2 termes pour cv.

- **Slutsky**

$\left| \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \text{ constante} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX \end{array} \right.$

- **Th. de continuité** (⇝ LFGN)

  - LGN $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$
  - $\hat{\theta}_n^2$? Th cont. $g(x) = x^2$

    $g(\hat{\theta}_n) = \hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta^2$.

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}, p.s., \mathcal{L}} X$,

$\Big|$ g une fonction continue

$g(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}, p.s., \mathcal{L}} g(X)$

- **Delta méthode** (⇝ Th. de continuité pour le TCL)

$\theta > 0$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

cv asymptotique de $\hat{\theta}_n^2$?

Δ méthode avec $g(x) = x^2$ continue, dérivable en $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(\theta) = 2\theta$.

$$\sqrt{n}\,(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, g'(\theta)^2 \sigma^2)$$

(• Inégalité de Markov)

$$\mathbb{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{c^p}$$

↳ (cv en proba)

cv p.s.

↑

Borel-Cantelli

- Calcul $\mathbb{E}$:
  - $\mathbb{E}[a] = a$ quand a est déterministe.
  - linéarité $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
  - $\mathbb{E}[XY]$? $\neq \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ ⚠ sauf si ces variables sont $\perp\!\!\!\perp$.

- Var :
  - $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ (a réel)
  - $\mathrm{Var}(X + a) = \mathrm{Var}(X)$.
  - $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \neq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ ⚠ sauf si les var. sont $\perp\!\!\!\perp$.

quant determ.

- biais : $\hat{\theta}_n$ estime θ. $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n - \theta]$ $= \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta$. ($= 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n$ sans biais)
- erreur quad moy ? $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$
- à utiliser tout le temps $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}(X)$
- prouver $\mathrm{Expr.}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathrm{Expr}(\bar{X}_n)$ → utiliser $\boxed{\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

  ↖ expression

- $\cancel{Var(X)} < 0$? NON .

- $\cancel{\mathbb{E}[X]} = X$? $\mathbb{E}$ c'est déterministe .

- Estimateur qui dépend de quant. inconnues ?

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ ⚠

$$X_n + Y_n \cancel{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X+Y \ ?$$

NON

$$X_n Y_n \cancel{\xrightarrow{\mathcal{L}}} XY \ ?$$

2 termes

$$\underbrace{\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2\right)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}}} + \underbrace{\frac{n\hat{\sigma}_n^2}{n-1}}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} \text{cste}}$$

Slutsky

- Revenir sur le cours de lundi ← ⚠

→ QUIZZ

Exo 2 - Feuille 2

6. $Z_j = (X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_Y)$. C_n converge en proba vers C.

$$C_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_Y)}_{1\text{er terme}} - \underbrace{(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y)}_{2\text{ème terme}}$$

on utilise la question 2.

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j - (\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y)$$

$\mathbb{E}[(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_Y)]$
$\neq \mathbb{E}[(X_j - \mu_X)]\,\mathbb{E}[\cdot]$
$(\cancel{X_j \perp\!\!\!\perp Y_j})$

→ 2 termes

1er terme | L.G.N (faible)

- Z_j i.i.d.
- $Z_j \perp\!\!\!\perp Z_i$, $j \neq i$ ✓ $(X_j - \mu_X)(Y_j - \mu_Y) \perp\!\!\!\perp (X_i - \mu_X)(Y_i - \mu_Y)$ $i \neq j$

  ↳ (car les couples $(X_j, Y_j) \perp\!\!\!\perp (X_i, Y_i)$ $i \neq j$)

- $\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[(X_1 - \mu_X)(Y_1 - \mu_Y)]$
  $= C$.

On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} C$$

2ème terme $(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y)$.

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu_X$ par LGN car X_i sont iid, $\mathbb{E}[X_1] = \mu_X$

$\Rightarrow \bar{X}_n - \mu_X \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ $(*)$

- $\bar{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu_Y$ par LGN car Y_i sont iid, $\mathbb{E}[Y_1] = \mu_Y$

$\Rightarrow \bar{Y}_n - \mu_Y \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. $(**)$

- Cv en loi: $\begin{matrix} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \end{matrix} \not\Rightarrow \begin{matrix} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X+Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY \end{matrix}$

Cv p.s., $\mathbb{P}$

$\boxed{\begin{matrix} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}, p.s} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}, p.s.} Y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}, p.s.} X+Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}, p.s.} XY \end{matrix}}$ (non démontré)

- Par $(*)$ et $(**)$ $(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

- 1er terme $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ C 2ème terme $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 0

C_n = 1er terme − 2ème terme $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ C

vitesse de convergence

7) $\underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X)}_{\text{1er terme}}\underbrace{(\bar{Y}_n - \mu_Y)}_{\text{2ème terme}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$

- Slutsky : 1er terme → $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$

Par le TCL,

car X_i iid, $\mathbb{E}[X_1]=\mu_X$, $Var(X_1) = \sigma_X^2$.

Moment d'ordre p

$\mathbb{E}[X^p] < \infty$

2ème terme $\bar{Y}_n - \mu_Y \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$ (cf question 6))

Par Slutsky $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ / cste

$\Rightarrow \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

cv en proba

• Markov (+ C.S.)

(Pely → Markov seulement)
de correction

Soit $\varepsilon > 0$

↓ déf de la cv en proba vers 0

$$\mathbb{P}\left(\left| \sqrt{m}\,(\bar{X}_m - \mu_X)(\bar{Y}_m - \mu_Y) \right| \geq \varepsilon \right)$$

Markov

$$\leq \frac{\mathbb{E}\left[\left| \sqrt{m}\,(\bar{X}_m - \mu_X)(\bar{Y}_m - \mu_Y) \right| \right]}{\varepsilon}$$

C.S.

$$\leq \frac{\sqrt{m}\sqrt{\mathbb{E}\left[(\bar{X}_m - \mu_X)^2\right]\mathbb{E}\left[(\bar{Y}_m - \mu_Y)^2\right]}}{\varepsilon}$$

$$\leq \frac{\sqrt{m}\,\sigma_X \sigma_Y}{\sqrt{m}\sqrt{m}\,\varepsilon} = \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sqrt{m}\,\varepsilon} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

Cauchy-Schwartz (C.S.)

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[|X|^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[|Y|^2\right]}$$

$$\mathbb{E}\left[(\bar{X}_m - \mu_X)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\bar{X}_m - \mathbb{E}[\bar{X}_m]\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{Var}(\bar{X}_m) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

X_i iid

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

$$= \frac{1}{m}\sigma_X^2$$

8) $\tau^4 = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2 (Y-\mu_Y)^2\right] < +\infty$.

cv asymptotique de C_m.

On veut : $\sqrt{m}\,(C_m - C) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\ ,\ \xi)$

$$\sqrt{m}\, C_m = \underbrace{\frac{\sqrt{m}}{m} \sum_{j=1}^{m} (X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_Y)}_{1\text{er terme}} - \underbrace{\sqrt{m}(\bar{X}_m-\mu_X)(\bar{Y}_m-\mu_Y)}_{2\text{ème terme}}.$$

question 2

- 1er terme TCL

- $(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_Y)$ iid.
- $\mathbb{E}\left[(X_1-\mu_X)(Y_1-\mu_Y)\right] = C$.
- $\text{Var}\left((X_1-\mu_X)(Y_1-\mu_Y)\right)$

$$= \mathbb{E}\left[(X_1-\mu_X)^2(Y_1-\mu_Y)^2\right] - C^2 = \tau^4 - C^2$$

$\text{Var}(X)$
$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Par le TCL,

$$\sqrt{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(X_j-\mu_X)(Y_j-\mu_Y) - C\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\ \tau^4 - C^2)$$

- 2ème terme $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu_X)(\bar{Y}_n - \mu_Y)$

Par la question 7, on a la cv en proba vers 0.

- Par Slutsky, on en conclue

$$\sqrt{n}\,(C_n - C) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^4 - C^2).$$

CC sur 20 , partiel P sur 30 , exam final F sur 50 .

$\frac{\text{NE}}{\text{écrit}}$ $E = \max\left(F + P,\ 8F/5\right)$ sur 80 .

$\frac{\text{note}}{\text{finale}}$ $\max\left(E + CC,\ 10E/8\right)$ sur 100 .

- Partiel 15 ^semaine^ mars
- CC sujet 1h30, 2h DM (semaine après le partiel)
- Exam final (~ mai)
- FOAD | CC ✓ / Partiel ✗ .

Exercice 3

$\theta \in \Theta$, Θ ouvert de $\mathbb{R}$.

$\varphi : \Theta \to \varphi(\Theta)$ C^1 - difféo .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{E}[X^k] = \varphi(\theta)$

1) Estimateur de $\varphi(\theta)$. $\sim \cancel{\varphi^{-1}}$

$\hookrightarrow \quad \hat{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$

2)

Retour sur la stabilité par addition et multiplication des différents types de convergence.

- Ce que l'on n'a pas

$$\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \end{array} \not\Longrightarrow \begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY \end{cases} \quad (\Delta)$$

- Ce que l'on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \; \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY \end{cases} (*) \\ \bullet \; \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{p.s.} X \\ Y_n \xrightarrow{p.s.} Y \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y \\ X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY \end{cases} \end{array}}$$

(non démontré en cours)

Remarque : $\boxed{\text{Si } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \; Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y}$, on peut en déduire $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$, $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY$

car en appliquant $(*)$, on a $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$

et donc la convergence en loi.

mais on part de la cv en proba !! (pas de la cv en loi ⚠) ça ne contredit pas (Δ)

Retour sur les formes indéterminées.

Quand vous avez $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$,

on ne peut généralement pas conclure ! (ce qui arrive à la question 7 de l'exo 2)

il faut regarder au cas par cas.

avec notamment les "vitesses de convergence"

Si u_n tend "plus vite" vers 0 que v_n tend vers $\pm\infty$,

$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

C'est le cas si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sqrt{n}$.

En L1 L2, vous avez formalisé cela avec les O et o.
grand O de ...

- Autres formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$