Exercice 7   Inégalité de Hölder

- $p, q, r > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$
- X, Y deux v.a. admettant un moment d'ordre p et q.

  ↳ pour pouvoir écrire $\mathbb{E}[|X|^p]$ et $\mathbb{E}[|Y|^q]$.

Alors

$$\mathbb{E}[|XY|^r]^{1/r} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}\, \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$$

1) Montrer que $\forall a, b > 0$

$$\frac{1}{r}(ab)^r \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

$r, q, p > 0$
$a, b > 0$

Astuce 1

Étudier la fonction

$$g_b : a \longmapsto \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q - \frac{1}{r}(ab)^r$$

On veut mq $g_b(a) \geq 0$.

- g_b une fonction de a, pour b fixé
  ↳ Je vais dériver par rapport à a.
- a et b sont symétriques → $g_b(a)$ revient au même que $g_a(b)$

$$g_b(a) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q - \frac{1}{r}(ab)^r$$

$$g_b'(a) = a^{p-1} - a^{r-1} b^r$$

g_b est une fonction de a donc dérivée par rapport à a !

$g_b \geq 0$

Je dois juste mq $\min g_b \geq 0$

Le minimum de g_b est atteint en a^*

$$g_b'(a^*) = 0$$

$$(a^*)^{p-1} - (a^*)^{r-1} b^r = 0 \iff a^* = b^{r/p-r}.$$

Astuce 2

Remarquer $q = \dfrac{rp}{p-r}$ car $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$

Minimum atteint en $a^* = b^{r/(p-r)}$

donc le minimum ~~est~~

$$g_b(a^*) = \frac{1}{p} b^{rp/(p-r)} + \frac{1}{q} b^q - \frac{1}{r} b^{r^2/(p-r)} b^r$$

Astuce 2

$$= \frac{1}{p} b^{rp/(p-r)} + \frac{1}{q} b^{rp/(p-r)} - \frac{1}{r} b^{r\left(\frac{r}{p-r}+1\right)}$$

Or $r\left(\frac{r}{p-r}+1\right) = r\,\frac{r+p-r}{p-r} = \frac{rp}{p-r}$

$$= \overbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}^{=0} b^{rp/(p-r)} = 0$$

On a bien $g_b(a) \geq 0$.

2) Inégalité de Hölder

Astuce 3

(Choisir a et b convenablement et appliquer 1)

Astuce 4

$$a = \frac{|X|}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad b = \frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{1/q}}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{|X|}{\left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{1/p}}\frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}[|Y|^q]\right)^{1/q}}\right)^r \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|X|}{\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|Y|}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}}\right)^q$$

p.s.

$\times r$

$$\left(\quad\right)^r \leq \frac{r}{p}\left(\frac{|X|}{\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}}\right)^p + \frac{r}{q}\left(\frac{|Y|}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}}\right)^q$$

p.s.

Astuce 5

Passer à l'espérance ! + utiliser $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$

$$\left(\frac{\mathbb{E}[|X|^r|Y|^r]}{\mathbb{E}[|X|^p]^{r/p}\,\mathbb{E}[|Y|^q]^{r/q}}\right) \leq \underbrace{\frac{r}{p}\frac{\mathbb{E}[|X|^{\cancel{p}}]}{\mathbb{E}[|X|^p]^{p/p}} + \frac{r}{q}\frac{\mathbb{E}[|Y|^{\cancel{q}}]}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{q/q}}}_{=1}$$

On prend la puissance r^{-1} de l'inégalité :

$$\frac{\mathbb{E}\left[|X|^r|Y|^r\right]^{1/r}}{\left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}[|Y|^q]\right)^{1/q}} \leqslant 1$$

On a donc (inégalité de Hölder)

$$\left(\mathbb{E}\left[|XY|^r\right]\right)^{1/r} \leqslant \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{1/q}$$

3) On a

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\mathbb{E}\left[|Y_n|^{\frac{2p}{p-2}}\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Montrer que $X_n Y_n$ cv en moyenne quadratique vers 0.

Astuce 6

On veut mq $\boxed{\mathbb{E}\left[X_n^2 Y_n^2\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

Utiliser l'inégalité de Hölder

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \quad \mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Astuce 7

L'inégalité de Hölder se réécrit (en prenant la puissance r)

$$\underline{\mathbb{E}\left[|XY|^r\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{r/p} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{r/q}} \qquad (*)$$

Astuce 8

Appliquer Hölder avec $r = 2$, $q = \dfrac{2p}{p-2}$

- On a vérifié : $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{r}$
- Je peux appliquer $(*)$

$$\mathbb{E}\left[|XY|^2\right] \leq \Big(\underbrace{\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big)^{2/p} \Big(\underbrace{\mathbb{E}\left[|Y_n|^{2p/(p-2)}\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big)^{\frac{p-2}{p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

TD Feuille 2

Exo 1

X v.a. de moyenne μ, variance σ^2

μ et σ^2 inconnues. On veut les estimer

$X_1, \dots, X_n$ v.a. indép. et de m̂ loi que X

1) Astuce 1

C'est du cours.

L'estimation de la moyenne est $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Estimateur de la moyenne $\boxed{\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$

$X_i = 1, 2, 1, 2, 1, 1 \dots$

moyenne empirique

$\mathbb{E}[a] = a$ déterministe

Astuce 2

Compréhension de l'énoncé

- Biais $\mathbb{E}[\bar{X}_n - \mu] = \mathbb{E}[\bar{X}_n] - \mu$

  Sans biais il faut mq $\mathbb{E}[\bar{X}_n - \mu] = 0$

  càd $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$

- Erreur quadratique moyenne

  $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2]$ à calculer

- Normalité asymptotique : il faut mq :

  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}$

- $\bar{X}_n$ estim. de la moyenne

- Biais $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{\text{linéarité de } \mathbb{E}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$

  $= \mu$

  X_i de même moy. μ

- $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mu)^2] = \mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])^2]$

erreur quadr. moy.

$= \mathrm{Var}(\bar{X}_n)$

$= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ X_i indépendantes

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$ X_i de m̂ variance σ^2

$= \frac{\sigma^2}{n}$

- Normalité asymptotique ✗ Pas de déf de cv en loi
✓ TCL

- X_i i.i.d
- $\sigma^2 > 0$, variance, $\mathbb{E}[X_1] = \mu$

Par le TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

2) $\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{X}_m)^2$

← c'est l'estimateur de la moyenne

Comment expliquer ce choix ?

Astuce 3

Remarquer $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$

espérance

- Un estimateur naturel serait

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \mu)^2 .$$

- μ inconnu. Un estimateur doit faire apparaître que des quantités connues

- Donc on remplace μ par son estimateur $\bar{X}_m$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n \right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 - 2 X_i \bar{X}_n + \bar{X}_n^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n} \bar{X}_n \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_n^2$$

$$= \underline{\hspace{3cm}} - 2 \bar{X}_n \bar{X}_n + \bar{X}_n^2$$

$$= \underline{\hspace{3cm}} - \bar{X}_n^2 .$$

3) $\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X}_m)^2$

On veut mq $\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_m - \mu)^2$

Astuce 4

Faire apparaître μ :

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} ((X_i - \mu) + (\mu - \bar{X}_m))^2$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^{m} (X_i - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} (X_i - \mu)(\mu - \bar{X}_m) + \sum_{i=1}^{m} (\mu - \bar{X}_m)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^{m} (X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \bar{X}_m) \boxed{\sum_{i=1}^{M} (X_i - \mu)} + m(\mu - \bar{X}_m)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{m} \left[\text{———} + \underbrace{2(\mu - \bar{X}_m) m (\bar{X}_m - \mu)}_{-2(\mu - \bar{X}_m)^2 m} + \text{———} \right]$$

$\sum_{i=1}^{m} X_i = m \bar{X}_m$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \boxed{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2} - \boxed{(\mu-\bar{X}_m)^2}.$$

4) $\tau^4 = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^4\right]$ (notation)

Normalité asymptotique de $\hat{\sigma}_n^2$.

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_m^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}$$

$\hat{\sigma}_m^2$ = 1er terme + 2ème terme.

- 1er terme TCL
  - $(X_i-\mu)^2$ i.i.d.
  - $\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X_i-\mathbb{E}[X_i])^2\right]$
    $= Var(X_i) = \sigma^2$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

- $Var\left((X_i-\mu)^2\right) = \mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^4\right] - \mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right]^2$
  $= \tau^4 - \sigma^4$

$$\sqrt{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \tau^4-\sigma^4\right)$$

• <u>2ème terme</u> $(\bar{X}_n - \psi)^2$.

Je veux : $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \psi)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \dots$

on ne pas pouvoir appliquer le TCL

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \psi)^2 = \underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \psi)}_{\text{Terme 2a)}} \underbrace{(\bar{X}_n - \mu)}_{\text{Terme 2b)}}$$

Terme 2a) TCL

Terme 2b) converge en proba

Slutsky → on pourra conclure.