Exe 3

(X_n) suite de v.a. centrées. $(\mathbb{E}[X_i] = 0, \forall i)$
de même variance σ^2
et tque $\forall i \neq j$ $\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 \alpha^{|i-j|}$

$$\alpha \in (0,1) =]0,1[$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1) $$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Linéarité de l'$\mathbb{E}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

les variables sont toutes centrées (donc $\hat{m}$ espérance pour touts les var)

$$= n\,\mathbb{E}[X_1]$$

$$= 0$$

2) $\mathrm{Var}(S_n)$ $\quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

⚠ On a $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$

si les X_i sont indépendantes.

donc pas ici ... (car $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \neq 0$)

⚠ Variance non linéaire.

$$\mathrm{Var}(S_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)}_{\text{1er terme}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{\text{2nd terme}}$$

Calcul du premier terme (facile)

$$\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_1) = n\sigma^2 .$$

les variables ont la m̂ variance σ^2

ASTUCE 1

Calcul du second terme (difficile)

- on a une somme $\sum_{i \neq j}$ mais 2 indices (i et j)
- il faut essayer de se ramener à une double somme (en jouant sur les indices début / fin)

$$\sum_{i=\bullet}^{\bullet} \sum_{j=\bullet}^{\bullet}$$

Astuce 2

Remarquer que l'expression de $Cov(X_i, X_j)$ est symétrique

$$Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$$

$$Cov(X_i, X_j) = \sigma^2 \alpha^{|j-i|}$$
$$= \sigma^2 \alpha^{|i-j|}$$

Appliquer l'astuce 1

$Cov(X_i, X_j)$ symétrique

$$\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) = \boxed{2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)}$$

si $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$

dans cette somme on va compter les termes quand

$(i = 1, j = 2) \longrightarrow Cov(X_1, X_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \|$

$(i = 2, j = 1) \longrightarrow Cov(X_2, X_1)$

mais pas $(i = 1, \cancel{j = 1})$, $(i = \cancel{2, j} = 2)$

on va avoir

$(i = 1, j = 2) \rightarrow Cov(X_1, X_2)$

mais 2 fois

$$\sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 2 \sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= 2 \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\begin{cases} i = 1 \to n \\ j = 1 \to n \end{cases}$$

$|j-i| \quad j > i$

$= j - i$

$$= 2 \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \sigma^2 \alpha^{j-i}$$

$$= 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^{j} \boxed{\sum_{i=1}^{j-1} \alpha^{-i}}$$

somme de suite géom !

de raison α^{-1}.

Astuce 3

Somme d'une suite géométrique

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre terme}}}{1 - \text{raison}}$$

$$= u_m \frac{1 - q^{\boxed{n - m + 1}}}{1 - q}$$

$$\sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^j \alpha^{-1} \frac{1 - \alpha^{-(j-1)}}{1 - \alpha^{-1}}$$

$$= 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^{j-1} \frac{1 - \alpha^{1-j}}{1 - \alpha^{-1}}$$

$$\ldots = 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^{j} \alpha^{-1} \frac{1 - \alpha^{1-j}}{1 - \alpha^{-1}}$$

$$\alpha^0 = 1$$

$$= 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha^{j-1} - \boxed{\alpha^{1-j+j-1}}}{1 - \alpha^{-1}}$$

$$= 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{m} \frac{\alpha^{j-1} - 1}{1 - \frac{1}{\alpha}} \longrightarrow \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

$$= 2\sigma^2 \frac{\alpha}{\underbrace{\alpha - 1}_{x-1}} \underbrace{\sum_{j=2}^{m} \alpha^{j-1} - 1}_{x-1} = 2\frac{\sigma^2 \alpha}{1-\alpha} \sum_{j=2}^{m} 1 - \alpha^{j-1}$$

$$= \frac{2\sigma^2 \alpha}{1-\alpha} \left((m-1) - \sum_{j=2}^{m} \alpha^{j-1} \right)$$

$$= \frac{2\sigma^2 \alpha}{1-\alpha} \left((m-1) - \alpha^{-1} \sum_{j=2}^{m} \alpha^{j} \right)$$

$$2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha}\left((n-1) + \alpha^{-1}\alpha^2 \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha}\left((n-1) + \alpha \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right).$$

Donc

$\mathrm{Var}(S_n)$ = ce qu'on voulait.

3) Cv en moy quad. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} S$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - S\right)^2\right]$$

Astuce 4

Tester $S = 0$

Astuce 5

Utiliser $\mathbb{E}\left[\left(X_n - \mathbb{E}[X_n]\right)^2\right] = Var(X_n)$

Si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]}_{=0}\right)^2\right]$$ question 1

$$= \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)$$ question 2

$$= \underbrace{\frac{1}{n^2}\Bigg(n\sigma^2}_{\sim 1/n} + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha}\Bigg(\underbrace{(n-1)}_{\sim 1/n} + \underbrace{\alpha\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}}_{\sim 1/n^2}\Bigg)\Bigg) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\alpha^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\alpha \in (0,1)$

Exo 6

- $Y \sim \mathcal{E}xp(1)$

densité f tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

- $X = Y + \theta$

densité $f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\,\mathbb{1}_{[\theta\,;+\infty[}(x)$

1)

Astuce 1 X v.a. sur $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

$\forall x \geq 0,$

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\,dt$$

$$= \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}.$$

Astuce 2

Utiliser la fdr de Y pour calculer celle de X

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

plus galère

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y + \theta \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(Y \leq x - \theta)$$

$$= F_Y(x - \theta)$$

$x - \theta \geq 0$

$x \geq \theta$

$$= \left(1 - e^{-(x-\theta)}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$$

2) $Z_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i$ $\qquad X_i \overset{iid}{\sim} X$

FdR de Z_n ?

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \leq x\right)$$

Astuce 3

Utiliser

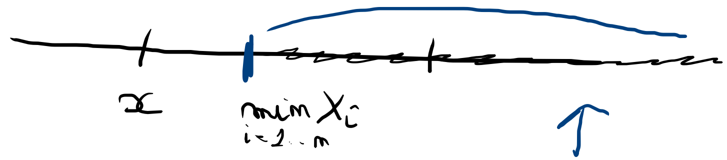
$$\mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \geq x\right)$$

$$F_{Z_n}(x) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \geq x\right)$$

On veut se ramener à utiliser $\mathbb{P}(X_i \leq x)$

Astuce 4

Si le minimum des X_i est supérieur à x



tous les X_i ~~se~~ retrouvent supérieurs à x !

Astuce 5

L'astuce 4) donne $\mathbb{P}(\min_{i=1..n} X_i \geq x) = \mathbb{P}(\forall i, X_i \geq x)$

Utiliser maintenant que les X_i sont indépendants

$\forall x \geq \theta,$

$$F_{Z_n}(x) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \geq x\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\forall i,\ X_i \geq x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \geq x\}\right)$$

X_i indépendants

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq x)$$

X_i même loi que X

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq x)$$

$\boxed{\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad X \text{ continue}}$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-(x-\theta)})$$

$$= 1 - e^{-n(x-\theta)}.$$

3) Z_n converge en proba vers θ. Soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n - \theta > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon + \theta)$$

$Z_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i$

$$\frac{X_i \geq \theta \text{ p.s.}}{Z_n \geq \theta \text{ p.s.}}$$

X_i à valeurs dans $[\theta ; +\infty[$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z_n \leq \varepsilon + \theta)$$

$$= 1 - F_{Z_n}(\varepsilon + \theta)$$

$$= e^{-n\varepsilon} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

4) Mq $n(Z_n - \theta) \sim \mathcal{E}xp(1)$.

On veut la loi $n(Z_n - \theta)$.

J'ai la fdR $\iff$ J'ai la loi

$$\mathbb{P}(n(Z_n - \theta) \leq x) = \mathbb{P}\left(Z_n \leq \frac{x}{n} + \theta\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-n\left(\left(\frac{x}{n} + \theta\right) - \theta\right)\right) \quad \forall \frac{x}{n} + \theta \geq \theta$$

$\iff \forall x \geq 0$

$$= (1 - \exp(-x)) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$$

C'est bien la fdR d'une $\mathcal{E}xp(1)$.