Exercice 4

Suite de v.a. (X_n). Normalité asymptotique de $g(X_n)$

$$v_n \left(g(X_n) - \quad \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \quad)$$

← va donner la vitesse de convergence.

Quel théorème utiliser ?

Delta - méthode !

- (X_n) une suite de va.
- (v_n) suite de réels tq $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
  (déterministe)
- a une constante
- g fonction $\boxed{\text{dérivable en } a}$.

c à d ... $a > 0$
g est dérivable en $\mathbb{R}^{+*}$

Si il existe $\sigma > 0$ tq

$$\sqrt{v_n}\,(X_n - a) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

ça on l'obtient avec ..TCL

Alors

$$\sqrt{v_n}\,\big(g(X_n) - g(a)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, g'(a)^2 \sigma^2)$$

1) • $g : x \longmapsto \sqrt{x}$, $\theta > 0$

• $\sqrt{n}\,(X_n - \theta^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

a (pour appliquer la Δ méthode)

↳ g dérivable ? • dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

• $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $g'(\theta^2) = \dfrac{1}{2\theta}$

↳ On a $\sqrt{n}\,(X_n - \theta^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Donc par la Δ méthode,

$$\sqrt{n}\,\big(g(X_n) - g(\theta^2)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, (g'(\theta^2))^2 \times 1\big)$$

$$\sqrt{n}\,\big(\sqrt{X_n} - \theta\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{4\theta^2}\Big) .$$

$Z_n = \dfrac{1}{X_n^2}$.

↳ TCL

X_n normalité asymp.

↳ Δ meth.

$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

2) . $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, $\theta \neq 0$.

. $\sqrt{n}\left(X_n - \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{=a}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right)$] (*)

↳ g dérivable ? oui sur $\mathbb{R}^*$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$g'\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\theta^2$$

↳ On a (*). Donc d'après la Δ méthode,

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)^2 \times \frac{1}{\theta^2}\right)$$

$\boxed{\text{Variance toujours positive !}}$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{X_n} - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right)$$

3) $\cdot\ g : x \mapsto e^x$, $\theta > 0$

$\cdot\ \sqrt{n}\left(X_n - \ln(\theta)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \ln(\theta)^2\right)$ (*)

↳ g dérivable ? oui sur $\mathbb{R}$ (donc $\mathbb{R}^+$)

$g'(x) = e^x$

$g'(\ln(\theta)) = \theta$

↳ On a (*). D'après la Δ méthode

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\ln(\theta))\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'(\ln(\theta))^2 \times \ln(\theta)^2\right)$$

$$\sqrt{n}\left(e^{X_n} - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2 \ln(\theta)^2\right).$$

Exercice 5

Rappel v.a. "sa loi" X $\longrightarrow$ Qu'est ce qui caractérise la loi d'une v.a. ?

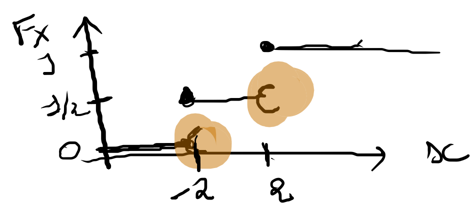
$\longrightarrow$ fonction de répartition (Fdr)

- $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ $\qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{v.a.}}}{F_X} (\underset{\substack{\nwarrow \\ \text{dét.}}}{x}) = \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{\substack{\text{c'est une proba} \\ \in [0,1]}}$

- croissante, continue à droite

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

X gaussienne



$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{P}(X < -2) = 0 \\ \mathbb{P}(X \in [-2, 2[) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 \end{array}\right.$$

X v.a. uniforme sur $[0,1]$.

1) Loi de $Z = -\log(X)$

<u>Rappel</u> Loi uniforme sur $[a,b]$:

- <u>Fdr</u> $F_X(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{\{a \leq x \leq b\}}$

Loi uniforme sur $[0,1]$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = x \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}.$$

Cela peut s'écrire $\forall x \in [0,1]$,

$$F_X(x) = x.$$

1) $\boxed{X \text{ v.a. } \sim \mathcal{U}[0,1]}$ → $F_X(x) = x \, \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}$.

$= \mathbb{P}(X \leq x)$

$Z = -\log(X)$ loi ?

J'ai la loi. ⟺ J'ai la fdr.

Je veux faire apparaître la fdr de X !

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(\underline{-\log(X) \leq x})$$

$\times -1$ donc l'inégalité

$$= \mathbb{P}(\log(X) \geq -x)$$

composer par l'exp. $\exp(\log(X)) = X$

$$= \mathbb{P}(X \geq \exp(-x))$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X < \exp(-x))$$

X continue $\mathbb{P}(X = \exp(-x)) = 0$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \leq \exp(-x))$$

$$= 1 - F_X(\exp(-x))$$

$$F_Z(x) = 1 - \exp(-x) \, \mathbb{1}_{\underbrace{\{0 \leq \exp(-x) \leq 1\}}_{x \in \mathbb{R}^{+*}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad F_Z(x) = 1 - \exp(-x)$$

↳ Z suit une loi exponentielle de param 1.

2) $Z_1, \dots, Z_n$ iid $\overset{\mathcal{L}}{\sim} Z$ $\qquad \bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$

- Z_i i.i.d.
- $\mathbb{E}[Z_1] = Var(Z_1) = 1$

Par le TCL,

$$\sqrt{n}\,(\bar{Z}_n - \underset{\underset{\mathbb{E}[Z_1]}{\uparrow}}{1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \underset{\underset{Var(Z_1)}{\uparrow}}{1}).$$

3) $$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}}.$$

Lien $\bar{Z}_n$ et Y_n ?

$\exists g$ tq $Y_n = g(\bar{Z}_n)$?

↳ Δ méthode

$$\bar{Z}_n = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$$

$$\log(Y_n) = -\log\left(\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n} \log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) = \bar{Z}_n$$

$\log(Y_n) = \bar{Z}_n$.

$\Rightarrow \quad Y_n = \exp(\bar{Z}_n)$

Je cherche la normalité asymptotique $\exp(\bar{Z}_n)$

Δ méthode !

- $g(x) = \exp(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $g'(x) = \exp(x)$

  $g'(1) = e$

- $\sqrt{n}\,(\bar{Z}_n - 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

Par la Δ méthode

$$\sqrt{n}\,\big(g(\bar{Z}_n) - g(1)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, (g'(1))^2\big)$$

$$\sqrt{n}\,\big(\exp(\bar{Z}_n) - e\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, e^2)$$

Exo 3

1) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall i,$ X_i centrée $\rightarrow \mathbb{E}[X_i] = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] && \text{linéarité de } \mathbb{E} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] && \forall i \ \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1] && X_i \text{ centrées} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2) $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

On ne peut pas sortir la somme !

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)}_{}$$

ici $\neq 0$

Hyper calculatoire !

$= 0$ quand les variables sont $\perp\!\!\!\perp$