Exo 8

1) Expérience 1 : les boîtes dans lesquelles on injecte 5 mg (10 premiers) ne sont pas liées avec boîtes dans lesquelles on injecte 10 mg (10 suivants)

→ Dans la première expérience, les 2 échantillons sont donc indépendants. → test classique

Expérience 2 : les boîtes dans lesquelles on injecte 5mg et celles où injecte 10 mg sont clairement dépendants (puisque l'on coupe les boîtes en 2)

Dans la 2ème expérience, les 2 échantillons ne sont pas indépendants. → test apparié

Hors programme

2) Expérience 1 — Rappelez le cadre théorique

↳ Écrivez théorie

On a 2 échantillons :

- Soit $x_{1,1}, \dots, x_{1,10}$ des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- Soit $x_{2,1}, \dots, x_{2,10}$ des réalisations de variables aléatoires indépendantes de m̂ loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- On considère que les 2 échantillons sont $\perp\!\!\!\perp$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

- On teste au risque 5 %

$$H_0 : \text{« } \mu_1 = \mu_2 \text{ »} \quad \text{contre} \quad H_1 : \text{« } \mu_1 \neq \mu_2 \text{ »}.$$

- On a la statistique de test

$$Z = \frac{\sqrt{10 \times 10}}{\sqrt{10 + 10}} \, \frac{\overline{X}_{1,10} - \overline{X}_{2,10}}{S} \sim \underbrace{T_{18}}_{10+10-2} \quad \text{sous } H_0$$

où $\bar{X}_{1,10}$ est la moyenne empirique pour le premier échantillon.

$\bar{X}_{2,10}$ est la ________________ 2ème échantillon.

S^2 est la variance empirique (S est l'écart-type empirique)

$$S^2 = \frac{1}{10+10-2}\left((10-1)\,S_1^2 + (10-1)\,S_2^2\right)$$

variance empirique pour le 1er échantillon

variance empirique pour le 2ème échantillon

- On a la zone de rejet :

$$ZR = \left\{ |Z| > t_{18,\,1-\alpha/2} \right\}.$$

<u>AN</u> : $|Z| = 1,64$ $\quad t_{18,\,\underbrace{1-\alpha/2}_{0,975}} = 2,101$

$\Rightarrow$ On ne rejette pas H_0.

Expérience 2 (Hors programme) ⚠ ce qui suit n'est pas à faire quand les échantillons sont ⫫

On considère les réalisations $x_{i,1}, x_{i,2}$ des v.a. $X_{i,1}, X_{i,2}$ identiquement distribuées de même loi que $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$.

On note $\mu_1 = \mathbb{E}[X_{1,1}]$ et $\mu_2 = \mathbb{E}[X_{1,2}]$

On considère $Y_i = X_{i,1} - X_{i,2} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

On teste au risque 5%

$$H_0 : \text{“}\mu_1 = \mu_2\text{”} \quad \text{contre} \quad H_1 : \text{“}\mu_1 \neq \mu_2\text{”}$$

On a la statistique de test

$$Z = \sqrt{10}\,\frac{\overline{X}_{10,1} - \overline{X}_{10,2}}{S} \sim T_{n-1} \text{ sous } H_0$$

T_S

avec S estimateur de σ^2, $\overline{X}_{10,1}$ de μ_1, $\overline{X}_{10,2}$ de μ_2.

La zone de rejet est $ZR = \{|Z| > t_{n-1, 1-\alpha/2}\}$.

Ici $z = 1{,}87$ et $t_{n-1, 1-\alpha/2} = 2{,}26$ donc on ne rejette pas H_0

Exo 8   question 1   Hors programme

ce que dit l'entreprise = "théorie"

1) On veut tester au risque 1%

H_0 : "la loi est P_0" contre H_1 : "la loi n'est pas P_0"

On a la statistique de test

$$Z = \sum_{k=1}^{K} \frac{(E_k - N_k)^2}{N_k} \sim \chi^2_{K-1} \text{ sous } H_0 .$$

La zone de rejet est

$$ZR = \{Z > k_{K-1, 1-\alpha}\}.$$

AN → on rejette H_0.

	modalité 1	modalité 2	modalité 3	Total
Observation	280	210	110	600
Théorie	360	180	60	600

Nbre de plants observés

Exo 9 question 2

Hors programme

a) On veut rejeter ou non l'hypothèse "le nouveau traitement est ≠ de l'ancien"

On peut donc tester

"la loi du nouveau traitement est ≠ de la loi de l'ancien traitement".

C'est donc un test du χ^2 d'adéquation.

(k modalités)

Différentes modalités

↳ Faire un tableau. mettre à la bonne proportion.

Effet	Éradication	Amélioration	Sans effet	Total
"théorie" → Nbre plants du traitement ancien	330	135	135	600
"observé" Nbre plants du nouveau traitement	280	210	110	600

On teste au risque 5% si le nouveau traitement est différent de l'ancien, càd

H_0 : « ils ont la même loi » contre H_1 : « ils ont une loi ≠ »

On a la statistique de test

$$Z = \sum_{k=1}^{k} \left(\frac{E_k - N_k}{N_k} \right)^2 \sim \chi^2_{k-1} \text{ sous } H_0 .$$

Zone de rejet $ZR^- = \{ Z > k_{k-1, 1-\alpha} \}$.

AN → on rejette H_0.

Poly section 5.6.2.

E_k : effectif observé pour la modalité k.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i = k\}} .$$

N_k : effectif théorique pour la modalité k.

Exo 5

ground truth.

Test sur la variance → "conformité" → un des variances vient d'un échantillon, l'autre est une valeur de référence "théorique"

ou moyenne

→ "égalité des 2 variances" → les 2 variances proviennent de 2 échantillons ≠ (données)

← Théorie

$$H_0 : \text{“}\sigma^2 = \sigma_0^2\text{”}$$

variance sous-jacente l'échantillon

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_g - m_0}{S_g}$$

DM.

$X_1, \dots, X_g$ v.a. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Première phase

$\overline{X}_n = 1{,}12$ (estim de μ)

$S^2 = 0{,}01$ (estim de σ^2)

1) Salaire moyen : la moyenne empirique est

$$m_o = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \overset{AN}{=} \frac{1}{16} \times 708 \simeq 44.$$

2) Estimation de σ^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - nm^2\right)$$

$$\overset{AN}{=} \frac{1}{15}\left(31\,675 - 16 \times 44^2\right)$$

$$\simeq 17.$$

Tps → l'estimateur empirique de la moyenne

→ l'estimateur empirique (non biaisé) de la variance

3) entreprise dit « je paie mes salariés, en moyenne, 47 € / jour ».

valeur de référence μ_0

- On teste au risque 5 %.

H_0 : « $\mu = 47$ » contre H_1 : « $\mu \neq 47$ ».

- On a la statistique de test :

$$Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu_0)}{S} \overset{L}{\sim} T_{n-1} \text{ sous } H_0,$$

où $\bar{X}_n$: moyenne empirique (m, question 1)

S^2 : variance empirique (question 2)

- On a la zone de rejet suivante :

$$ZR = \{ |Z| > t_{n-1, 1-\alpha/2} \}.$$

<u>AN</u> $|Z| = 2,5849$, $t_{15,\,0,975} = 2,13$. Donc on rejette H_0

p-value $= 0,01015$.

p-value $< 0,05 \Rightarrow$ on rejette H_0 au risque 5%

p-value $> 0,01 \Rightarrow$ on ne rejette pas H_0 au risque 1%

4) Entreprise dit " $\sigma_0^2 = 5$ ". (référence).

• On teste au risque 5%.

H_0 : " $\sigma^2 = \sigma_0^2$ " contre " $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ".

• On a la statistique de test

$$Z = 15 \frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{15} \text{ sous } H_0 .$$

• On a la zone de rejet :

$$ZR = \{k_{0,025} > Z\} \cup \{k_{0,975} < Z\}.$$

où $k_{0,025}$ est le quantile d'ordre 0,025 de la loi du χ^2_{15}.

AN $\quad z \approx 52 \quad k_{0,875} = 27,5 \quad$ On a $z > k_{0,875}$.

$\Rightarrow$ on rejette H_0.