Exercice 3

1) • Moyenne de durée de survie des souris du groupe 1

$$m_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} x_{j,1} = \frac{1}{9} \times 506 = 56,22$$

• ______________________ du groupe 2

$$m_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} x_{j,2} = \frac{1}{7} \times 608 = 86,86$$

Le traitement semble avoir une influence sur la survie ($m_2 > m_1$) mais sans les statistiques, ce n'est pas possible de bien répondre à la question.

2) IC au niveau 95% pour μ_1 et μ_2.

Modélisation on a $X_1, \dots, X_{n_1} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

on a $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_{n_1} - \mu_1}{\sigma_1} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

et

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_{n_2} - \mu_2}{\sigma_2} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

on ne peut pas directement utiliser ces lois car σ_1 et σ_2 sont inconnues

Posons $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1} \displaystyle\sum_{j=1}^{n_1} (X_{j,1} - \bar{X}_{n_1})^2$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (X_{j,2} - \bar{X}_{n_2})^2$$

D'après le cours, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_{n_1} - \mu_1)}{\hat{\sigma}_1} \sim T_{n-1} & (*) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_{n_2} - \mu_2)}{\hat{\sigma}_2} \sim T_{n-2} & (**) \end{cases}$$

Avec (*) et (**), on va pouvoir obtenir des IC.

<u>Pour μ_1</u> : on part de (*) qui implique :

$$\mathbb{P}\left(-t_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_{n_1}-\mu_1)}{\hat{\sigma}_1} \leq t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

avec $t_{1-\alpha/2}$ le quantile de la loi de Student de degré n_1-1 d'ordre $1-\alpha/2$.

Cela implique :

$$\mathbb{P}\left(-\bar{X}_{n_1} - \frac{t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_1}{\sqrt{n}} \leq -\mu_1 \leq -\bar{X}_{n_1} + \frac{t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bar{X}_{n_1} - \frac{t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_1}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 \leq \bar{X}_{n_1} + \frac{t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Donc $IC_{\mu_1} = \left[\bar{X}_{n_1} \pm \dfrac{t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_1}{\sqrt{n}}\right]$ $\qquad IC_{\mu_1} = [24\ ;\ 89]$

<u>AN</u> : $\bar{X}_{n_1} = m_1 = 56{,}22$, $\quad \hat{\sigma}_1 = \dfrac{1}{n_1-1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_{i,1} - n_1\bar{X}_{n_1}^2\right) = 42{,}42$

Pour l'AN

Comment trouver $t_{1-\alpha/2}$?

C'est le quantile de la loi de Student de degré $n_1 - 1 = 8$ d'ordre $\underbrace{1-\alpha/2}$ $= 0,975$

on veut $\alpha = 0,05$ car IC de niveau 95%

$$\mathbb{P}(T_8 \leq t_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\mathbb{P}(T_8 \leq 2,306) = 0,975$$

$$t_{1-\alpha/2} = 2,306.$$

Pour μ_2 : on part de $(**)$

$$\mathbb{P}\left(-\tilde{t}_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_{n_2}-\mu_2)}{\hat{\sigma}_2} \leq \tilde{t}_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha ,$$

avec $\tilde{t}_{1-\alpha/2}$ le quantile de la loi de Student de degré n_2-1 d'ordre $1-\alpha/2$

Cela implique :

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_{n_2} - \frac{\tilde{t}_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_2}{\sqrt{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{X}_{n_2} + \frac{\tilde{t}_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_2}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{\mu_2} = \left[\bar{X}_{n_2} \pm \frac{\tilde{t}_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_2}{\sqrt{n}}\right]$$

AN : $\bar{X}_{n_2} = 86,86$, $\hat{\sigma}_2 = 66,77$, $IC_{\mu_2} = [25, 148]$.

$\tilde{t}_{1-\alpha/2} = 2,447$.

3) On suppose $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Il y a donc deux estimateurs pour σ^2 :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j=1}^{n_1} (X_{j,1} - \bar{X}_{n_1})^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (X_{j,2} - \bar{X}_{n_2})^2$$

Comme dans l'exercice 2, on cherche S^2 qui prenne en compte S_1^2 et S_2^2 et qui conserve la bonne propriété :

$$k\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_k$$

On a (cours) :

- $(n_1-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$

- $(n_2-1)\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$

D'après le théorème de Cochran (les 2 échantillons $X_{11}, \dots, X_{n_1 1}$ $X_{12}, \dots, X_{n_2 2}$ $\perp\!\!\!\perp$),

$$(n_1-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} + (n_2-1)\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$$

donc $$(n_1+n_2-2)\underbrace{\left(\frac{1}{n_1+n_2-2}\left((n_1-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} + (n_2-1)\frac{S_2^2}{\sigma^2}\right)\right)} \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$$

On pose donc $S^2 = \frac{1}{n_1+n_2-1}\left((n_1-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} + (n_2-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2}\right)$

Comme dans l'exercice 2, on sait que (cours)

$$T(\mu_1-\mu_2) = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2} - (\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim T_{n_1+n_2-2}$$

loi de Student.

- Ici on veut tester H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$" au risque 1%

(càd H_0 : "$\mu_1-\mu_2 = 0$" contre H_1 : "$\mu_1-\mu_2 \neq 0$")

- Sous H_0, la statistique de test est

loi de Student de degré n_1+n_2-1

$$T(0) = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim T_{n_1+n_2-2}$$

- La zone de rejet est : $ZR = \{|T(0)| \geqslant t_{1-\alpha/2}\}$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile de $T_{n_1+n_2-1}$

AN $\quad |T(0)| = -1,12.$

$t_{1-\alpha/2}$ quantile de le loi de Student de degré $\underbrace{n_1+n_2-2}_{=14}$.

On veut comparer $|T(0)|$ et $t_{1-\alpha/2}$ mais dans l'énoncé, on n'a pas la valeur de $t_{1-\alpha/2}$

- On doit donc raisonner avec la p-value

La sortie R nous donne une p-value $= 0,2721$.

p-value $\geqslant \underbrace{0,01}_{\text{risque } 1\% \text{ du test}}$ donc on ne rejette pas H_0.

4) Le test est à remettre en question, on a supposé $\sigma_1 = \sigma_2$.
Sur les boîtes à moustache, la dispersion dans le groupe "placebo" est vraiment moins prononcée que dans le groupe "traitement".