Ex 3

On a : $\hat{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{2}$

Q1) à 4)

- fortement consistant $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \theta$ (Δ)
- asymptotiquement normal $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$

5) $\alpha \in (0,1)$

IC asymptotique de niveau $1-\alpha$ du paramètre θ.

↳ On cherche A_n, B_n quantités qui ne dépendent pas de θ tq connues

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\theta \in [A_n, B_n]\right) = 1 - \alpha$$

1ere solution (méthode du plug-in)

- On part de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$.

Cela implique $\dfrac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ (*)

- θ est au dénominateur et au numérateur

On va utiliser la méthode du plug-in

càd remplacer θ (au dénominateur) par $\hat{\theta}_n$

On s'intéresse donc à $\dfrac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n}$.

Prouvons que $\dfrac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

- On a :

$$\frac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} = \underbrace{\frac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta}}_{\substack{(*)\ \downarrow \mathcal{L} \\ \mathcal{N}(0,1)}} \underbrace{\frac{\theta}{\hat{\theta}_n}}_{\substack{\downarrow \mathbb{P} \\ 1}} \quad (\triangleright)$$

1 car $\hat{\theta}_n$ faiblement consistant

- Par le théorème de Slutsky

$$\frac{2\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

• On a donc $\dfrac{2\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

cela implique :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{2\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\hat{\theta}_n} \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

cela suffit sur vos copies.

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha/2$.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n}{2\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n}{2\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n}{2\sqrt{n}}\,;\ \hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n}{2\sqrt{n}}\right]$$

2ème solution

$$\underbrace{2\sqrt{n}\,\frac{(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 2\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right)$$ (θ n'apparaît plus qu'au dénominateur)

Donc on a : $2\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leqslant 2\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right) \leqslant q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\hat{\theta}_n 2\sqrt{n}} + \frac{1}{\hat{\theta}_n} \leqslant \frac{1}{\theta} \leqslant \frac{q_{1-\alpha/2}}{\hat{\theta}_n 2\sqrt{n}} + \frac{1}{\hat{\theta}_n}\right) = 1 - \alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + 1} \leqslant \theta \leqslant \frac{\hat{\theta}_n}{-\frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} + 1}\right) = 1 - \alpha$$

en supposant que

$1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} > 0$ p.s. à partir d'un certain rang.

6) <u>EMV</u>

- $L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{X_i-\theta}{\theta}\right) \mathbb{1}_{[\theta ; +\infty[}(X_i)$$

- L_X vaut 0 ou $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{X_i-\theta}{\theta}\right)$.

L_X ne vaut pas 0 si $\forall i \quad X_i \geq \theta$ p.s.

$\iff \min_i X_i \geq \theta$ p.s.

La fonction $\theta \mapsto \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{X_i-\theta}{\theta}\right)$ est strictement croissante sur $]0 ; \min_i X_i[$

L'unique maximum de L_X est atteint en $\min_i X_i$

Donc l'EMV est $\min_i X_i = \hat{\theta}^{MV}$

7) $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_\theta(x)\,dx$. ← • soit on calcule de manière brutale

• <u>Mieux</u>

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(Y + \theta \leq x) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq x - \theta) \\ &= F_Y(x-\theta)\end{aligned}$$

où F_Y fdR d'une $\mathcal{E}xp(1/\theta)$.

$$= \left(1 - \exp\left(-\frac{(x-\theta)}{\theta}\right)\right) \mathbb{1}_{x \geq \theta}.$$

$$\mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,m} X_i \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,m} X_i \geq x\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\forall i = 1,\dots,m \quad X_i \geq x\right)$$

$\mathbb{P}(\cap\ ) = \prod$ si indépendance

Par indépendance des X_i

$$= 1 - \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \geq x)$$

X_i de même loi que X

$$= 1 - \left(1 - \mathbb{P}(X \leq x)\right)^m$$

$$= \left(1 - \exp\left(-m\frac{(x-\theta)}{\theta}\right)\right) \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}.$$

8) $\underline{\underline{\text{Loi}}}$ $m(X_{(1)} - \theta)$, $\quad X_{(1)} \triangleq \min_{i=1,\dots,m} X_i$.

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(m(X_{(1)} - \theta) \leq x\right)}_{\text{FDR de } m(X_{(1)}-\theta)} = \mathbb{P}\left(X_{(1)} \leq \frac{x}{m} + \theta\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}}_{\text{FDR de } \mathcal{E}xp(1/\theta)}$$

$$m(X_{(1)} - \theta) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}xp(1/\theta).$$

9) <u>cv en proba de $X_{(1)}$</u>. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(|X_{(1)} - \theta| > \varepsilon)$$

$X_{(1)} \geq \theta$ p.s.

(par déf de l'EMV question 6)

$$= \mathbb{P}(X_{(1)} - \theta > \varepsilon)$$

$$= \mathbb{P}(X_{(1)} > \varepsilon + \theta)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} \leq \varepsilon + \theta)$$

$$= 1 - F_{X_{(1)}}(\varepsilon + \theta)$$

avec $\varepsilon + \theta \geq \theta$ car $\varepsilon > 0$.

$$= \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{\theta}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

10) a) $X_{(1)}$ biaisé ?

$\mathbb{E}[X_{(1)} - \theta]$?

- Loi de $(X_{(1)} - \theta)$

$$\mathbb{P}(X_{(1)} - \theta \leq x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x + \theta)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{n x}{\theta}\right) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

donc $(X_{(1)} - \theta) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}xp\left(\frac{n}{\theta}\right)$.

- $\mathbb{E}[X_{(1)} - \theta] = \frac{\theta}{n}$.

↳ $X_{(1)}$ est donc biaisé.

b) $X_{(1)}$ asympt-biaisé ?

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_{(1)} - \theta] = \lim_{n \to +\infty} \frac{\theta}{n} = 0.$$

donc $X_{(1)}$ est asympt. sans biais

$\min_{i=1,\dots,n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\neq} X_1$

$\vdots$

X_n

X_i i.i.d

X_1 n'a pas la m̂ fdR que $\min_{i=1,\dots,n} X_i$

$\min X_i = f(X_1, \dots, X_n)$

11) Cv en moyenne quadratique de $X_{(1)}$ $\to$ Déf ($\hookrightarrow$ Markov)

$$\mathbb{E}\left[(X_{(1)}-\theta)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_{(1)}-\theta\right]^2 + \mathrm{Var}(X_{(1)}-\theta)$$

décomposition biais - variance

$$= \frac{\theta^2}{n^2} + \underbrace{\mathrm{Var}(X_{(1)}-\theta)}_{\text{variance de } \mathrm{Exp}\left(\frac{n}{\theta}\right)}$$

$\mathrm{Var}(X_{(1)}) = \mathrm{Var}(X_{(1)}-\theta)$

$$= \frac{\theta^2}{n^2} + \frac{\theta^2}{n^2}$$

$$= \frac{2\theta^2}{n^2}.$$

12) IC pour θ - (non asymptotique) $\longrightarrow$ A_n, B_n

$\mathbb{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1-\alpha$

On va se baser sur $X_{(1)} = \min\limits_{i=1,\dots,n} X_i$.

- On a déjà la borne sup :

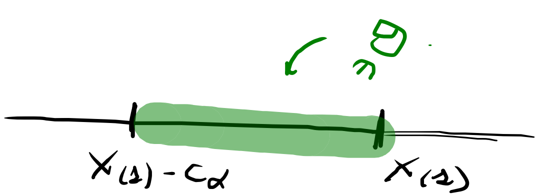
$\theta \leq X_{(1)}$ p.s

- On cherche donc A_n tq

$\mathbb{P}(\theta \in [A_n, X_{(1)}]) = 1-\alpha$.

- On va chercher un A_n de la forme

$A_n = X_{(1)} - c_\alpha$ où $c_\alpha > 0$.



On va chercher $c_\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{(1)} - c_\alpha \leqslant \theta \leqslant X_{(1)}) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_{(1)} - c_\alpha \leqslant \theta) = 1-\alpha.$$

$n(X_{(1} - \theta)$

$X_{(1)} - \theta$

$X_{(1)}$

$$\mathbb{P}(X_{(1)} - c_\alpha \leqslant \theta) = \mathbb{P}(X_{(1)} - \theta \leqslant c_\alpha).$$

$$= F_Z(c_\alpha) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{n}{\theta}\right).$$

$$= 1-\alpha.$$

Donc

$$c_\alpha = F_Z^{-1}(1-\alpha).$$

$$F_Z(c_\alpha) = 1-\alpha \Leftrightarrow 1-\exp\left(-\frac{n c_\alpha}{\theta}\right) = 1-\alpha.$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{n c_\alpha}{\theta}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow c_\alpha = -\frac{\theta}{n}\ln(\alpha).$$

On a donc l'IC pour θ :

$$\left[X_{(1)} + \frac{\theta \ln(\alpha)}{n} \; ; \; X_{(1)} \right]$$

dépend de θ ! on ne doit pas s'arrêter là !

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\underbrace{X_{(1)} + \frac{\theta \overbrace{\ln(\alpha)}^{<0 \text{ car } \alpha \in (0,1)}}{n} \leqslant \theta}_{} \right) \leqslant X_{(1)} \Big)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{(1)} \leqslant \theta \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{n} \right) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{(1)} \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{n} \right)^{-1} \leqslant \theta \right).$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[X_{(1)} \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{n} \right)^{-1} \; ; \; X_{(1)} \right].$$

13)

Premier IC

- asymptotique ($n \to +\infty$)
- l'estimateur associé $\frac{\overline{X}_n}{2}$

(vitesse de cv en $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

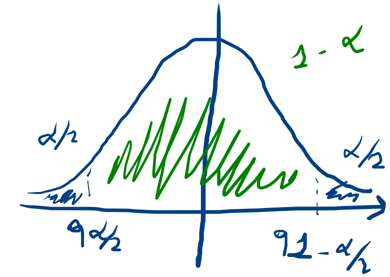
Deuxième IC

- non asymptotique (vrai $\forall n$)
- l'estimateur associé vitesse de cv + rapide en $\frac{1}{n}$.

Démo

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ implique :

$$\mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



(PAS BESOIN DE L'ECRIRE SUR VOS COPIES !)

$q_{(1-\alpha/2)}$ ← indice

$q_{1-\alpha/2}$ est le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha/2$.

Il vérifie donc $\mathbb{P}(X \leq q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. par définition du quantile

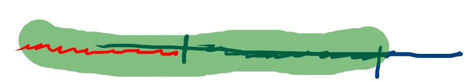
$= F_X(q_{1-\alpha/2})$ fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour obtenir $1-\alpha$, il faut encadrer X avec :

$$\mathbb{P}(q_{\alpha/2} \leq X \leq q_{1-\alpha/2}) = \mathbb{P}(X \leq q_{1-\alpha/2}) - \mathbb{P}(X \leq q_{\alpha/2})$$

$$= F_X(q_{1-\alpha/2}) - F_X(q_{\alpha/2})$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.$$



$q_{\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2}$ car $\mathcal{N}(0,1)$ symétrique