Exercice 5

$X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$.

1) $\mathbb{E}[X_1] = \theta$.

$\text{Var}(X_1) = \theta$

Un estimateur de θ est donc $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

Par le TCL, $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta)$

$X_1, \dots, X_n$ iid
$\mathbb{E}[X_1] = \theta$
$\text{Var}(X_1) = \theta$

3) IC asymptotique à 95% pour θ

quantités connues

$\overline{A_n, B_n}$ tq

$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\theta \in [A_n, B_n])$

$= 1 - \alpha$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta)$$

- $$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Plug-in $$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n}}$$

Montrons que $\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

On utilise Slutsky :

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta}}}_{\downarrow \mathcal{L} \atop \mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\hat{\theta}_n}}}_{\downarrow \mathbb{P} \atop 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

car $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \theta$ (par LGN)

$\sqrt{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{\theta}$ (par le th de continuité)

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$, ce qui implique :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ de degré $1-\alpha/2$.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n \mp \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} \right].$$

4) On veut $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tq

$$\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Par la Δ méthode, on a : g continue et dérivable en $\underbrace{\mathbb{R}^{+*}}_{\text{domaine de déf de } \theta}$.

$$\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'(\theta)\right)^2 \theta\right)$$

(car on avait $\boxed{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\theta)}$ question 2))

Je cherche g tq

$$g'(\theta)^2 \theta = 1$$

$$g'(\theta)^2 = 1/\theta$$

$$g'(\theta) = 1/\sqrt{\theta}$$

On peut choisir $g(x) = 2\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

5) $$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\hat{\theta}_n} - 2\sqrt{\theta}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(2\sqrt{\hat{\theta}_n} - 2\sqrt{\theta}\right) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-2\sqrt{\hat{\theta}_n} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq -2\sqrt{\theta} \leq -2\sqrt{\hat{\theta}_n} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\times \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\hat{\theta}_n} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{\theta} \leq \sqrt{\hat{\theta}_n} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left(\sqrt{\hat{\theta}_n} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)^2 \leq \theta \leq \left(\sqrt{\hat{\theta}_n} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)^2\right) = 1-\alpha$$

$$IC'_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} + \frac{q^{1}_{1-\alpha/2}}{4n} \;;\; \hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_n}}{\sqrt{n}} + \frac{q^{2}_{1-\alpha/2}}{4n}\right].$$

6) dans la q3) on a trouvé un intervalle de conf.

$$IC_{1-\alpha} = [A_n, B_n].$$

dans la q5) $IC'_{1-\alpha} = [A'_n, B'_n]$.

$$\frac{A'_n}{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \frac{B'_n}{B_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

$$\frac{\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\theta}_n} + \frac{q^2_{1-\alpha/2}}{4n}}{\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\theta}_n}}$$

$$= 1 + \frac{q^2_{1-\alpha/2}}{4n\left(\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{\theta}_n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1.$$

Exercice 3

$\theta > 0$, Y suit une loi exp. de param θ^{-1}

$$X = Y + \theta \qquad f_\theta(x) = C_\theta \exp\left(-\frac{x-\theta}{\theta}\right) \mathbb{1}_{[\theta ; +\infty[}(x)$$

$X_1, \dots, X_n$ iid.

On cherche C_θ tq :

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\, dx = 1$. càd :

$$\underbrace{\int_\theta^{+\infty} \exp\left(-\frac{x-\theta}{\theta}\right) dx}_{} = \frac{1}{C_\theta}$$

$$= \left[-\theta \exp\left(-\frac{x-\theta}{\theta}\right)\right]_\theta^{+\infty} = \theta \qquad \text{donc } C_\theta = \frac{1}{\theta}.$$

2) 1ère solution $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x)\,dx$ (long)

2ème solution → il faut connaître la loi exp. ($\mathbb{E}$, Var)

$X = Y + \theta$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] + \theta$ par linéarité de $\mathbb{E}$

$= \theta + \theta$ car $Y \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \theta$

$= 2\theta$.

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y + \theta) = \mathrm{Var}(Y)$

$= \theta^2$.

3) Un estimateur de $\mathbb{E}[X] = 2\theta$ est $\overline{X}_n$.

Donc un estimateur de θ est $\frac{\overline{X}_n}{2}$.

4) • $\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} 2\theta$ (LFGN)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{X}_n}{2} \xrightarrow{p.s.} \theta$ [(TR de continuité)]

• $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 2\theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \mathcal{N}(0, \theta^2)$. (TCL)

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n}{2} - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \mathcal{N}\left(0, \dfrac{\theta^2}{4}\right)$ [(Δ méthode)]