Fin exo 2 (TD3)

On avait trouvé un IC asymptotique pour θ de niveau $1-\alpha$:

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}} \; ; \; \hat{\theta}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}} \right]$$

6) IC asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour p :

On utilise $\theta = \frac{1}{p^2}$.

ne dépendant pas de θ

IC asym pour p :
on cherche $\hat{A}_n$, $\hat{B}_n$ connues

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(p \in [\hat{A}_n, \hat{B}_n]) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\_\_\_\_\_\_ \leq \frac{1}{p^2} \leq \_\_\_\_\_\_ \right) = 1-\alpha$$

$$\hat{\theta}_n \mp \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}} > 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{(on admet ce résultat)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}} \leq p^2 \leq \frac{1}{\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}} \right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}}} \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}}} \right) = 1-\alpha$$

Un IC asymp. de niveau $1-\alpha$ pour p :

$$IC_{1-\alpha,\,p} = \left[\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}}} \; ; \; \frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\hat{\theta}_n^{3/2}}{\sqrt{n}}}} \right]$$

7) • $\theta = \dfrac{1}{p^2}$. $\Leftrightarrow$ $p = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$.

On peut proposer $\hat{p}_n = \dfrac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n}}$ pour estimer p.

• Forte consistance

On a : $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta = \dfrac{1}{p^2}$. (la question 1))

Pour $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(\begin{array}{l} g\left(\dfrac{1}{p^2}\right) = p. \\ g(\hat{\theta}_n) = \dfrac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} \end{array} \right)$

continue en $1/p^2 > 0$.

on applique le théorème de continuité

$$g(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} g(\theta) = g(1/p^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p.$$

	LGN	Th de cont
Forte consistance		
Normalité asymptotique	TCL	Δ méthode
	$\hat{\theta}_n$	$g(\hat{\theta}_n)$

8) On utilise la $\mathcal{L}_p$) qui donne :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^3\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{p^6}\right)$$

- Avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ continue en $1/p^2 > 0$, on peut appliquer la Δ méthode qui donne :

$$g'(x) = \frac{-1}{2x^{3/2}}$$

$$\sqrt{n}\left(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'\left(\frac{1}{p^2}\right)^2 \frac{1}{p^6}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n}} - p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$g'\left(\frac{1}{p^2}\right) = -\frac{1}{2}p^3$$

$$\left(\begin{aligned} g(x) &= x^{-1/2} \\ g'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{aligned}\right)$$

9) • $\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

• On veut un IC asymp. de niveau $1-\alpha$ pour p.
On veut trouver $\hat{A}_n, \hat{B}_n$, (qui ne dépendent pas de p)

tq $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\hat{A}_n \leq p \leq \hat{B}_n\right) = 1-\alpha$.

• $\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{4}}\mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{2\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

Cela implique :

• $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq 2\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$,

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-\frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \leq \hat{p}_n - p \leq \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-\frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} - \hat{p}_n \leq -p \leq \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} - \hat{p}_n \right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\hat{p}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha.$$

$$\widetilde{IC}_{1-\alpha,\, p} = \left[\hat{p}_n \pm \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right]$$

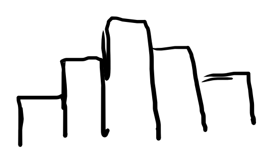
Exo 1

Données → poids des oeufs (en g). ($n = 36$ oeufs)

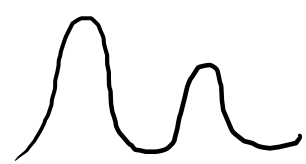
↳ $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. (Hyp. stat que l'on fait)

1. Avec l'histogramme, est-ce que l'hypothèse gaussienne a du sens ?

- symétrique ? L'histogramme ne semble pas sym.



- 1 mode



↳ 2 modes

→ l'hypothèse gaussienne est difficile à vérifier, mais on n'a peu de données et donc l'hypothèse gaussienne est un bon premier choix.

2) Estimation de la moyenne

↳ On prend la moyenne empirique :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$ ↳ poids des œufs.

A.N. (appli num.) → à la calculatrice
→ Python, R, ...

$$m = \frac{1}{36} \left(50{,}34 + 52{,}62 + \cdots + 63{,}15 \right).$$

$$\underline{m = 55{,}08}.$$

↳ On prend la variance empirique (non biaisée)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$$

- variance emp.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

- μ inconnu → on le remplace par m

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

(biaisé)

A.N. (appli num)

$$s^2 \approx 7$$

3) IC (non symétrique) de niveau 95 % pour le poids des oeufs moyen $= \mu$.

On a vu en cours :

on note $\bar{X}_n =$ la moyenne empirique

$$\boxed{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim T_{n-1}}$$

loi de Student de degré $n-1$.

(la prochaine fois) plus de détails

$$\left(\begin{array}{l} \cdot\ \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \cdot\ S^2/\sigma^2 \sim \chi^2 \end{array} \right] \rightsquigarrow \text{Student}$$

$$\mathbb{P}\left(\underset{-t_{\alpha/2}}{-t_{1-\alpha/2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \leq t_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

$t_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi Student (symétrique)

$$\mathbb{P}\left(-t_{1-\alpha/2} S \leq \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \leq t_{1-\alpha/2} S\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-\frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} - \overline{X}_n \leq -\mu \leq \frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} - \overline{X}_n\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\overline{X}_n - \frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$= 0{,}95$$

Un $IC_\mu = \left[\overline{X}_n - \frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_n + \frac{t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}}\right]$

AN : $[54{,}15 ; 56{,}01]$

$$\boxed{t_{1-\alpha/2} = 2{,}030}$$ → loi de Student de degré 35 $(n-1)$

$\alpha = 0{,}05$ car on veut un IC de niveau 95%

$\mathbb{P}(\sigma^2 \in [A_n, B_n]) = 1-\alpha$

$\alpha = 0{,}05$

4) IC de niveau 95% pour la variance σ^2

D'après le cours (on reviendra dessus dans la suite des TDs)

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \leftarrow \text{loi du } \chi^2 \text{ de degré } n-1$$

Cela implique

$$\mathbb{P}\left(k_{n-1,\alpha/2} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq k_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

avec $k_{n-1,\alpha/2}$ le quantile, d'une loi de Chi 2 de degré $n-1$, d'ordre $\alpha/2$

donc $\mathbb{P}\left(\frac{k_{n-1,\alpha/2}}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{k_{n-1,1-\alpha/2}}{(n-1)S^2}\right) = 1-\alpha$

. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\hookrightarrow \quad \mathbb{P}(-q_{1-\alpha/2} \leq X \leq q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$.

car Loi symétrique.

. $X \sim \mathcal{L}_g$. $\mathcal{L}_g$ loi (exp., χ^2, $\mathcal{N}$, Student, ...)

$\hookrightarrow \quad \mathbb{P}(\ell_{\alpha/2} \leq X \leq \ell_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$

ℓ_k quantile d'ordre k de la loi $\mathcal{L}_g$.

Si $\mathcal{L}_g$ est sym., $\ell_{\alpha/2} = -\ell_{1-\alpha/2}$.

où F fdR de $\mathcal{L}_g$.

$F(\ell_k) = k$.

Lois symétriques	non symétriques
• $\mathcal{N}$ • T (Student)	• χ^2

et finalement on obtient :

$$P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{k_{n-1,\,1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S^2}{k_{n-1,\,\alpha/2}} \right).$$

Donc $IC_{1-\alpha,\sigma^2} = \left[\dfrac{(n-1)\,S^2}{k_{n-1,\,1-\alpha/2}} \; ; \; \dfrac{(n-1)\,S^2}{k_{n-1,\,\alpha/2}} \right].$

<u>AN</u> : $k_{n-1,\,1-\alpha/2} = k_{35;\,0,975}$.

$k_{n-1,\,\alpha/2} = k_{35;\,0,025}$

$$IC_{1-\alpha,\sigma^2} = [4,36 \; ; \; 12,83].$$

5) Niveau de confiance intervalle centré en m et de demi-longueur 0,76 ?

• On avait trouvé un IC pour μ (centré en m) :

$$IC_{1-\alpha,\mu} = \left[m - \frac{2 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} ; m + \frac{2 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \right]$$

La longueur de cet intervalle est

$$m + \frac{2 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} - \left(m - \frac{2 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} \right) = \frac{4 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}}$$

On cherche donc α tq $\frac{2 t_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{n}} = 0,76$.

$$\frac{2\, t_{1-\alpha/2}\, s}{\sqrt{n}} = 0{,}76 \iff t_{1-\alpha/2} = \frac{0{,}76\sqrt{n}}{2s}$$

$$\iff 1-\alpha/2 = F\left(\frac{0{,}76\sqrt{n}}{2s}\right)$$

Ici on utilise la définition du quantile

$$F^{-1}(x \leq t_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2.$$

où F est la fdr d'une loi de Student de degré $n-1$

$$\iff \alpha = 2\left(1 - F\left(\frac{0{,}76\sqrt{n}}{2s}\right)\right)$$

<u>AN</u> : $\alpha = 0{,}68$.