Exercice 2 TD3

On suppose $X_1, \dots, X_n$ iid de même loi que X

La loi de X a un paramètre p inconnu

et on sait que

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X^2] = \dfrac{1}{p^2} \\[2ex] \mathbb{E}[X^4] = \dfrac{1}{p^6} + \dfrac{1}{p^4} \end{cases}$$

On pose $\theta = p^{-2}$.

1) $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{p^2} = \theta$.

- Donc un estimateur naturel de θ est $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

- Par la forte des grands nombres, | X_i^2 iid, $\mathbb{E}[X^2] = \theta$

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \theta.$$

Donc $\hat{\theta}_n$ estimateur (fortement) consistant de θ.

2) $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n - \theta] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta$

$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] - \theta$

linéarité de $\mathbb{E}$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] - \theta = \frac{1}{n} n\,\mathbb{E}[\cancel{X^2}] - \theta$

$= \theta - \theta = 0$

L'estimateur est sans biais.

3) EQM = Biais^2 + Variance

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n - \theta]^2 + \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$$

(Question de cours de votre partiel)

Le biais est nul donc

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$$

$$= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

X_i indépendantes

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i^2)$$

X_i même loi

$$= \frac{1}{n^2}\, n\, \mathrm{Var}(X^2)$$

$\mathrm{Var}(X)$
$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$$= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2\right)$$

$$= \frac{1}{n p^6} = \frac{\theta^3}{n}$$

4) Norm. asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

Par le TCL $\quad \Big|$ X_i^2 iid

$\mathbb{E}[X_1^2] = \theta$, $Var(X_1^2) = \theta^3$,

$$\boxed{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^3)$$

Intervalle de conf. asymptotique pour θ de niveau $1-\alpha$.

On cherche $\hat{A}_n, \hat{B}_n$ qui dépendent que de quantités connues (pas de θ) telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\hat{A}_n \leq \theta \leq \hat{B}_n) = 1-\alpha$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\theta \in [\hat{A}_n, \hat{B}_n]) = 1-\alpha.$$

IC à 95%

↳ on prend $\alpha = 0,05$.

$\mathcal{N}(0, a^2) = a\,\mathcal{N}(0,1)$

5). Intervalle de confiance asymptotique

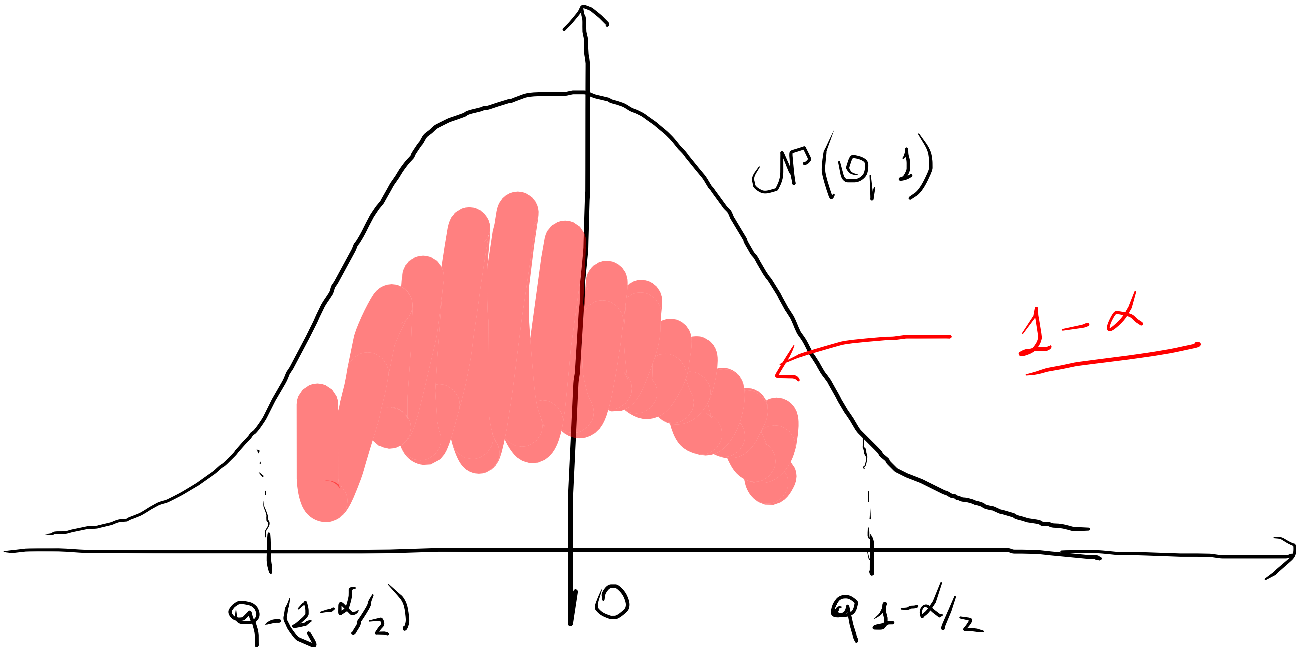
- On part de $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^3)$

(*) $$\boxed{\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta^{3/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}$$

On veut utiliser $Z \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$, Z v.a.

alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(Z \in [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]\right) = 1 - \alpha$,

où $q_{1-\alpha/2}$ quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha/2$.



$$q_{-(1-\alpha/2)} = -q_{1-\alpha/2}$$

car $\mathcal{N}(0,1)$ symétrique

$$q_{0,5} = -q_{1-0,5}$$

$(*)$ $\quad \dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta^{3/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

$$\Downarrow$$

- $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \cancel{\dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\theta^{3/2}}} \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$

↳ On va pas réussir à encoder θ par des quantités connues qui ne dépendent pas de θ.

Plug-in $\quad$ On a envie de remplacer θ par $\hat{\theta}_n$:

$(**)$ $\quad$ • $\dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n^{\,3/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\hat{\theta}_n^{3/2}} = \frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\theta^{3/2}}\ \frac{\theta^{3/2}}{\hat{\theta}_n^{3/2}}$$

Je veux montrer que $\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

On utilise Slutsky :

$g(x) = \dfrac{\theta^{3/2}}{x}$

On a : a) $\dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\theta^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

b) $\hat{\theta}_n^{3/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \theta^{3/2}$ donc $\dfrac{\theta^{3/2}}{\hat{\theta}_n^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1$

et Par Slutsky $\dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)}{\hat{\theta}_n^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

On a obtenu $(**)$.

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n^{3/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Cela implique :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n^{3/2}} \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha ,$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha/2$.

$$\iff \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \leq \hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

$$\iff \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-\hat{\theta}_n - \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq -\theta \leq -\hat{\theta}_n + \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$\iff \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

R, Python, ...

quantiles → pas calculables pour $\mathcal{N}$. (• sur ordi • tables)

(c'est la raison historique pour laquelle on se ramène à une $\mathcal{N}(0,1)$)

Q5) conclusion →

L'intervalle de confiance pour θ de niveau $1-\alpha$ est

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n - \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} ; \hat{\theta}_n + \frac{\hat{\theta}_n^{3/2} q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right]$$

non asymptotique (m̂ chose sans lim)

IC asymptotique pour θ de niveau $1-\alpha$

① Partir d'une normalité asymptotique
ou d'une convergence en loi

$$(*) \quad \sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \quad Z \text{ loi (par exemple } \mathcal{E}xp\text{)}$$

cas de la normalité asymptotique :

② On transforme $(*)$:

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad (**)$$

- si σ dépend de θ, on doit remplacer θ dans σ par $\hat{\theta}_n$
  $(\sigma = \theta^{3/2})$ $\rightsquigarrow$ σ_n
  (il faut pas que θ soit au num. et au dénom.)
- si σ ne dépend pas de θ ☺.

③ (**)

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma_n} \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$\vdots$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\hat{A}_n \leq \theta \leq \hat{B}_n\right) = 1 - \alpha$$

④ Conclusion : IC asymptotique est $[\hat{A}_n ; \hat{B}_n]$

sans limite : (IC non asymptotique)

$\hat{\theta}_n - \theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $\forall n$ donc $\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n} \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$