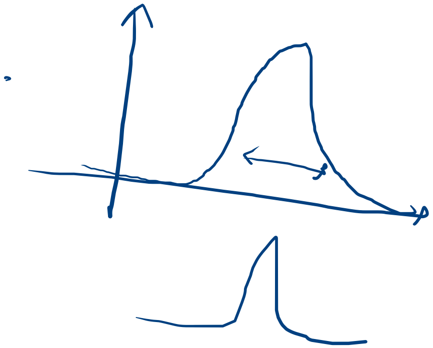
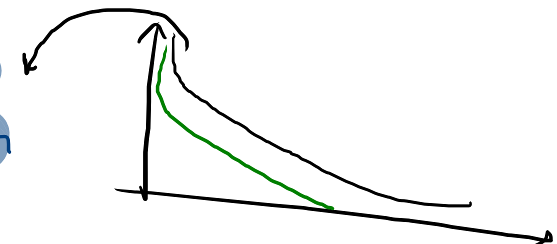
$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \qquad X \sim \mathcal{N}.$$



$$n\,(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}$$

$$(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \frac{X}{\sqrt{n}}$$



$$(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\mathcal{E}}{n}$$

décroît plus vite vers 0

Vitesse de convergence

Comment $(\hat{\theta}_n - \theta)$ (écart de l'estimateur à θ) décroît vers 0 ?

On veut l'estimateur avec la vitesse de cv qui décroît le + vite vers 0.

Exercice 8

$\theta > 0$. $X \sim \mathrm{Unif}[0,\theta]$. (loi continue).

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} X$

1) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\theta}{2}$.

- Par la méthode des moments,

un estim. de $\mathbb{E}[X]$ c'est $\overline{X}_n$

un estim. de θ c'est $2\overline{X}_n = \hat{\theta}_n$

$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \dfrac{\theta}{2}$ (LGN)

$g : x \mapsto 2x$ continue, $\underset{\hat{\theta}_n}{\overset{\shortparallel}{g(\overline{X}_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta$ (Th de continuité)

$\hat{\theta}_n$ cv p.s vers θ.

2) $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n - \theta) = \mathbb{E}[2\bar{X}_n - \theta] = 2\,\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \theta$

$= 2\dfrac{\theta}{2} - \theta$.

$= 0$.

sans biais.

3) $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}_n)$

$= Var(2\bar{X}_n)$

$= 4\, Var(\bar{X}_n)$

$= \dfrac{4\theta^2}{12n}$

$= \dfrac{\theta^2}{3n}$.

$\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$Var(X) = \theta^2/12$

$Var(\bar{X}_n) = \dfrac{\theta^2}{12n}$

4) Normalité asymptotique

TCL $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)$

Δ méthode $g(x) = 2x$ continue

$g'(x) = 2.$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\frac{\theta^2}{3}}_{= \frac{g'(\theta)^2\,\theta^2}{12} = \frac{4\theta^2}{12}}\Big)$$

5) EMV

$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$ $\qquad f_\theta(X_i) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0;\theta]}(X_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(X_i)$

- $\mathcal{E}xp(1)$ $f(x) = \exp(-x)\, \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x)}_{}$

dépend pas de θ.

$\forall x_i \geqslant 0,\quad L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{m} \exp(-x_i)$

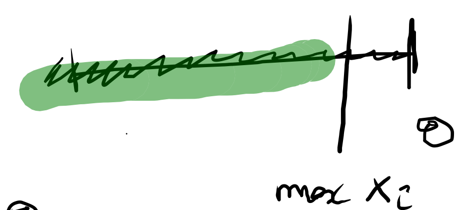
- Dès que l'indicatrice dépend de θ, on doit la mettre dans la vraisemblance

$\rightsquigarrow \min_i x_i,\ \max_i x_i$ (souvent)

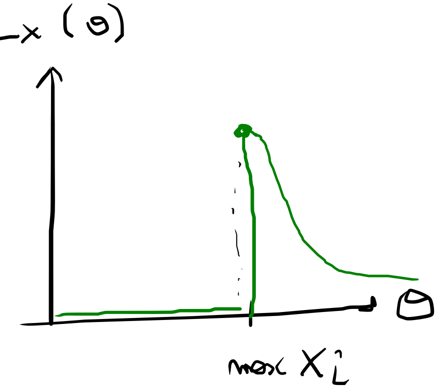
$$L_x(\theta) = \frac{1}{\theta^m} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{[0;\theta]}(x_i)$$

- L_x est non nulle si $\forall i,\ x_i \leqslant \theta$

$\Leftrightarrow \max_i x_i \leqslant \theta$.



$\hat{\theta}^{MV} = \max_i X_i$? (candidat)



L_X est-elle bien croissante ?

Si $\theta \leq \max_i X_i$, elle est nulle $\exists i, X_i > \theta$.
donc j'ai au moins une indicatrice nulle.

Si $\theta > \max_i X_i$, $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1} = 1$.
$\theta \mapsto \frac{1}{\theta^n}$ décroissante.

$\max_i X_i$ est bien l'EMV.

6) $\mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t}{\theta} \mathbb{1}_{[0;\theta]}$.

$\boxed{f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0;\theta)}(x)}$

7) $X_{(n)} = \max_i X_i$

$$\mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) = \mathbb{P}(\max_i X_i \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(\forall i \ X_i \leq t)$$

X_i indép

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t)$$

X_i de mê loi

$$= \mathbb{P}(X \leq t)^n$$

$$= \frac{t^n}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0;\theta]}.$$

3) $X_{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \theta$. (définition) car LGN + continuité

ça va pas marcher.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}\left(\left| X_{(n)} - \theta \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left(\theta - X_{(n)} \geq \varepsilon \right)$$

$\uparrow$

$X_{(n)} \leq \theta$ par déf de l'EMV.

$$= \mathbb{P}\left(\theta - \varepsilon \geq X_{(n)} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \theta - \varepsilon \right)$$

$0 \leq \theta - \varepsilon \leq \theta$

$\hookrightarrow \varepsilon \leq \theta$ et $\theta \geq 0$.

$$= \frac{(\theta - \varepsilon)^n}{\theta^n} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,\theta]}(\theta - \varepsilon)}_{= \mathbb{1}_{[0,\theta]}(\varepsilon)}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

9) Borel-Cantelli $\rightarrow$ convergence p.s.

Détails dans feuille à part.

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_{(n)} - \theta| \geq \varepsilon) < +\infty \Rightarrow X_{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta$$

(par Borel Cantelli)

$\forall \varepsilon \in [0;\theta]$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_{(n)} - \theta| \geq \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\left(\frac{1}{1-\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}} - 1\right)$$

$< \infty$

(c'est une constante

pas de dépendance en n)

JE DÉTAILLERAI

Détails $\rightarrow$ on utilise $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

donc $\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$.

10) $F_E(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \mathbb{1}\{t \geq 0\}$ quand $E \sim \mathcal{E}xp(\theta^{-1})$

11) $n(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}xp(\theta^{-1})$

TCL + Δ méthode pas marcher avec le max. X_i

↳ définition avec les fonctions de répartitions

$$\mathbb{P}(n(\theta - X_{(n)}) \leq t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n(\theta - X_{(n)}) \leq t) &= \mathbb{P}\left(X_{(n)} \geq \theta - \frac{t}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_{(n)} \leq \theta - \frac{t}{n}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta}\right)^n \underbrace{\mathbb{1}_{[0,\theta]}\left(\theta - \frac{t}{n}\right)}_{\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)}
\end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{t}{n\theta}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{\theta n}\right)\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

DL de ln à l'ordre 1 (en 0)

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{n t}{\theta n}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(n\left(X_{(n)}-\theta\right) \leqslant t\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1-\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad \forall t \geqslant 0.$$

12)

$$n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}xp(1) \quad \rightsquigarrow \text{ vitesse de cv } 1/n$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ —— } 1/\sqrt{n}$$

On choisit l'EMV. On choisit $X_{(n)}$.

- → Bias, EQM.
- → LGN, continuité $\xrightarrow{p.s.}$
- → TCL, Δ méthode $\xrightarrow{\mathcal{L}}$
- → Méthode des moments | pour trouver un estimateur.
- → EMV

TD1, TD2

exo 7, exo 8 TD2.

exo 4, 5, 6 TD1