$\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 1

1) . cv en loi : $\forall$ fonction continue bornée φ,

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$ $\qquad \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$

. cv en proba : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

. cv p.s. : $\mathbb{P}(\lim_{n \to +\infty} X_n = X) = 1$

$$= \mathbb{P}(\forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X)$$

. cv en moyenne quad. $\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2) $\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3) a constante.

On a la cv. en loi.

Pour tout point de continuité de F,

(*) $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_a(x) = \mathbb{P}(\cancel{a} \leq x)$ ← fonction de répartition.

$= \mathbb{P}(X_n \leq x)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|X_n - \cancel{a}| \geq \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon + a) + \mathbb{P}(X_n \leq a - \varepsilon)$

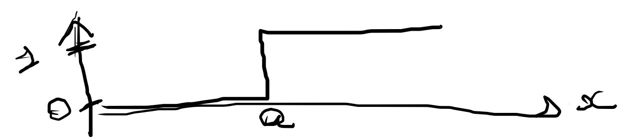
$= 1 - F_{X_n}(\varepsilon + a) + F_{X_n}(a - \varepsilon)$

$\longrightarrow 1 - F_a(\varepsilon + a) + F_a(a - \varepsilon)$ par (*)

$1 - 1 + 0$

$= 0$

$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$



4) $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(a)$

D'après 3), cv en loi vers une cste

$\Rightarrow$ cv en proba.

On va mq la cv en loi de $h(X_n)$ vers $h(a)$.

Soit φ une fonction continue bornée

$$\mathbb{E}\left[\varphi(h(X_n))\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\varphi \circ h}_{\uparrow}(X_n)\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi \circ h(a)\right]$$

continue bornée

5) • (X_n) suite de v.a. aléatoires

$X_n = \underbrace{\frac{1}{n}}$?? $\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/2 \end{cases} \leftarrow$ aléatoire ! $X_n \in \{1, 2\}$

$\uparrow$

déterministe !

Si cv de une suite déterministe

$\Rightarrow$ cv en loi, proba, p.s., moy. quad.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

• $X_n = (-1)^n$ déterministe ✓

$X_1 = -1$, $X_2 = 1$, $X_3 = -1$

Elle diverge !

- $X_n = Z_n \mathbb{1}_{B_n}$

  $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

  $\mathbb{P}(B_n) \to 1$

<u>Slutsky</u> $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}} A$

$B_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$

$A_n B_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aA$

- cv <u>en loi</u> : $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_n}]$

  $\mathbb{1}_{B_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

  slutsky $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

- cv en moy. quad ? $\mathbb{E}[(X_n - Z)^2] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

  pas de cv quad. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_n}^2] = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

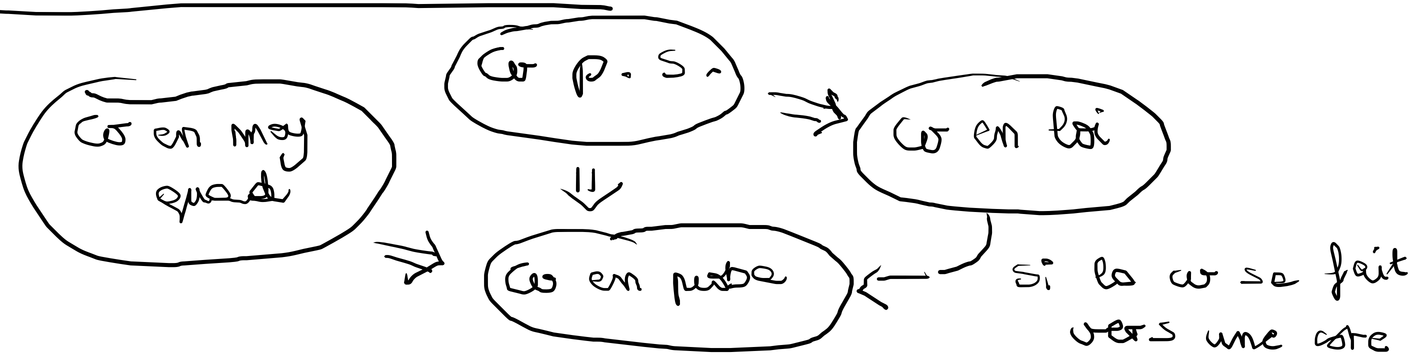
- <u>cv en proba</u> $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

  Gaussien (la normale)

$$Z_n = -Z \xrightarrow{\mathcal{L}} Z .$$

$$B_n = \Omega \qquad \mathbb{1}_{B_n} = 1 .$$

$X_n = -Z \overset{\mathbb{P}}{\not\to} Z$ on n'a pas la cv en proba.



- Détails pour $\mathbb{P}(B_n) \to 1 \Rightarrow \mathbb{1}_{B_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

$\mathbb{P}(|\mathbb{1}_{B_n} - 1| > 0)$?

$$\mathbb{1}_{B_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } B_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\mathbb{P}(|\mathbb{1}_{B_n} - 1| > 0) = \mathbb{P}(B_n \text{ n'est pas réalisé})$

$$= \mathbb{P}(B_n^c)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(B_n)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Truc à savoir !

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right] = \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \cdots\cdots$$

$$p = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \operatorname{Var}(X)}$$

3) $\begin{cases} \bullet\ \mathbb{E}[S_n] = pn \quad (\underline{\text{linéarité}}) \\ \bullet\ Var(S_n) = np(1-p) \\ \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} p \end{cases}$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)^2\right]$$

$$= Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \qquad \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = Var(X)$$

$$= \frac{1}{n^2} Var(S_n)$$

$$= \frac{p(1-p)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}$$

$\begin{cases} p(1-p) \\ \leq 1/4 \end{cases}, p \in [0,1]$

4) $p \in]0,1[$ $\quad \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Inégalité de Tchebychev.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right]}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad \text{par la 4)}$$

5) $\underline{\text{TCL}}$ $\quad \frac{S_n}{n}$ $\quad \left(S_n = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{1}\{X_j \in D\}}_{Y_j} \right.$

- Y_i i.i.d.
- $\text{Var}(Y_1) = p(1-p) < +\infty$ $\quad \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$