Borel - Cantelli

$(A_n)_{n\geq 1}$ suite d'évènements.

$$\boxed{\text{Si } \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \quad \text{Alors } \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0}$$

Question

Comment mq $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ en utilisant Borel-Cantelli ?

On part de la convergence presque-sûre :

on travaille avec des intersections c'est plus propre. On prend à la fin $\varepsilon = 1/k$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega,\ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega,\ \forall k>0, \exists N(\omega), n\geq N(\omega) \Rightarrow \left(|X_n(\omega)-X(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right)\right\}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq 1}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}\right)}_{= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\limsup_{n}|X_n - X| > \frac{1}{k}\right)}$$

Donc si on montre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \limsup_n \left(|X_n - X| > 1/k \right) \right) = 0, \quad (*)$$

on aura montré la convergence presque-sûre de X_n vers X

(*) peut être montré en utilisant le lemme de Borel-Cantelli

Si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{k}\right) < +\infty$, $\underline{\forall k \geq 1}$

on peut le prouver $\forall \varepsilon > 0$ et prendre $\varepsilon = 1/k$

on a par Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n |X_n - X| > \frac{1}{k}\right) = 0, \quad \forall k \geq 1$$

et donc la réunion dénombrable d'évènements de proba nulle étant nulle,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \limsup_n |X_n - X| > \frac{1}{k} \right) = 0.$$